序

學與世交相需，世需學，學亦需世，古之君子，肇端創作 以啓民智，然後文明日展而世日昌，後之君子，博覽多識，以宏世用，然後科條日分而學日廣，蓋古學與今學，雖時殊勢異，然應運而生，則一也，所謂國故，所謂科學，皆難外此，吾國之易，古學也，博大精微，自漢宋迄今，雖義理頗闡明，而效用尙玄際，非前儒不逮，固爲世運所牽掣，急於彼，未急於此，無足異也，近代世運變遷，科學進化，學者目所見，耳所聞，光怪離奇，風起雲湧，由精神義理，推而及之物質科學，切磋琢磨，分析互證，日新月異而歲不同，發明創造彌多，德慧智術彌廣，此亦世運所啓迪，遭遇迥異使然也，毓津生値斯世，據所學，深思博考，於是獨能以現代科學證明古代之易卦，創著「易與量子物質波」一書，張皇幽眇，發前人所未發，並世學者，駭爲未見未聞，奔走相告，然能卒讀澈解者殊少，觀其融鑄易卦與數理於一罏，通易義者，多未治數理科學，治數理科學者，又多未通易義，二者不可得兼，民國三十一年冬，三五國學耆老，及大學數理敎授，集議請毓津演講，解釋其條理意義，列席聽者二百餘人，日講一時，六閱月畢事，始終未輟席者約百人，治數理科學者，咸信服其不妄，國學耆老，尤驚歎特識，當時前安徽大學校長，吾友程君演生與愚，實旁聽，數理雖未能盡解，已深識其義理與例證，不容少强，其後聽講之士，苦原

著書經亂散失難得，且艱深不易卒讀，期更製簡明講義，便讀者，冀普及，乃續著「易經科學講」省前書文字過大半，數理例證，間有變通，義理則仍一貫如故，蓋前書取演繹，較洪況曲折，此講則重歸納，就簡達，或較易讀，噫，其敬業樂羣之志勤且篤矣，或謂昔揚雄著太玄，劉歆且謂空自苦，今當舉世擾攘紛紜之際，事此不舍，毋乃迂，惡，是何言，中儒皓首窮經，西儒竭畢生力，瘁於一數一物，擴及聲力光電原子量子，其迂詎非尤甚，然奇偉進化無已之世界，又何嘗非無數大迂者所奠基造就乎，世變日亟，列邦皆以科學立國，爭長競雄，興亡消長強弱之機，實繫此，數十年來，國內外學子負笈從師，汲汲從事於科學者踵相接，所謂碩士博士且冠帶相望，然國未加強，治未加勵，業未加興，科學往往委頓閒散，屈莫容伸，甚或學非所用，用非所學，深歎學優而仕，其學輒荒，國家與人才科學交受其弊，求其終身孜孜，埋首潛心於科學，爲國家社會百年之計者何寡，以此蘄科學立國，是何異緣木求魚，却行而求及前人耶，毓津未冠，已頗治國故，入大學，治數理，復赴歐美考察，納交各邦績學士，見聞既廣，深知非科學無以救國，三十後，卽不求聞達，專力潛學，於數理獨深造，間有疑問，求之典籍友朋而不決者，不惜郵書海外徵訊，必獲於心而後安，迄今越五十歲，雖世亂，仍不倦，每展卷握管聚精神，竭思力，輒日夕不休，非所謂發憤忘食，樂以忘憂者乎，夫易，求通其義理，固不難，欲證明與現代科學無不相通相合，則難，更進而能證明易已超越現代科學相對論四度者，尤大難特難，豈好創異於人哉，積於中者發於外，思所以責實求是而已，數不可假，證不可誣，循循然莫不有規

矩，其言未出，世未聞此義，其言既出，世不可無此言，旁搜遠紹，拓開萬古心胸，使國人咸曉然五千年前伏羲文王孔子，所遺留於我後人者已如此，我後人不能發揮繩武，其不肖忝厥祖爲何如，今不僅闢考據國故新蹊徑，尤可證科學思想，亦吾五千年前所有，後世尙文，遂至淹沒，數典忘祖，幾視國故與科學，若扞格不通，視己愈輕，視人愈重，人侮自侮者，可勝嘅哉，夫學，所以濟世致用者也，輿邦多難，需科學急於救火待水，倘無羣力以策之，其學孤，其勢弱，其效亦微，毓津頗願得同志而益彰，急欲讀其書者，咸殷望刊布，深冀能讀此書者，日益加多，於國故，於科學，其裨益豈淺鮮哉，愚既序其前，今又索序，謹就著此講本末，及私衷所感，再略言之。 桐城張鴻鼎序

易　經　科　學　講

超相對論目錄

第一卷　易方陣形學

第一章　引言

§1　超相對論定義 1
§2　易與八卦 2
§3　明誠之教 2
§4　伏羲八卦 4
§5　文王八卦 5
§6　孔子八卦 6
§7　靈質溝通 7
§8　科學世界 9

第二章　易方陣之解析

§ 9　易方陣 10
§10　交錯線迹 10

§11 交綜線迹 ……11

§12 卐卍之來歷 ……14

第三章 河圖之統計力學

§13 易統計方程式 ……16

§14 易統計方程式總攝三種統計 ……17

§15 引出博郎克量子方程式 ……20

第四章 易方陣為球面排列

§16 易方陣之統計 ……23

§17 球面排列與 π 數 ……24

§18 階度算法與易方陣 ……25

§19 數量場之階度 ……26

第五章 易方陣詮證

§20 易方陣優於今方陣 ……30

§21 今之方陣 ……30

§22 向量解析 ……31

§23 交綜關係為向量之旋轉 ……32

§24 直線與圓 ……34

§25 交錯關係為向量之散佈 ……38

§26　狄拉克之 q 數 ……41

第六章　河洛數與易方陣

§27　卦之序數 ……43
§28　交錯關係之公式 ……44
§29　交綜關係之公式 ……45
§30　河洛之較 ……46

第七章　太極圖與易方陣

§31　波羅吉利振相速度之算 ……48
§32　勢之學理 ……50
§33　電子之理論 ……54
§34　易方陣之電子方程式 ……56
§35　狄拉克電子用極坐標之算 ……57
§36　易方陣與太極圖 ……59
§37　太極圖之方程式 ……60
§38　菠綸與衛納之算 ……61

第八章　易方陣引出向量理論諸方程式

§39　引出拉普拉斯導誘係數 ……66
§40　引出哥斯定理 ……67

§41 引出格里恩定理 ……………………69
§42 引出斯篤克定理 ……………………69
§43 其他向量算法之公式 ……………………71

第九章 易方陣引出希魯汀格電子方程式

§44 引出普生方程式 ……………………75
§45 引出希魯汀格方程式 ……………………77

第二卷 超相對論原理

第十章 卐字之解

§46 卐字爲易方陣之核心 ……………………82
§47 光線四向散佈之義 ……………………82
§48 八卦爲五度之義 ……………………83
§49 易方陣之命數方陣 ……………………85
§50 陰陽電子與第一第二光波四方陣之週期變化 ……………………89
§51 卐卍方陣之幾何解析 ……………………90
§52 第一第二光波方陣幾何解析 ……………………93
§53 引出波動力學基本方程式 ……………………97
§54 引出量子力學基本方程式……………………100
§55 博郎克之作用量子……………………102
§56 六豈之解……………………104

第十一章　超相對論說明空時電磁基本關係

§57　空時與電磁兩皆四度體系……108

§58　物質張量……112

§59　五度宇宙張量……114

§60　空時電磁之綜合關係……116

§61　引出麥克斯威爾電磁波公式……119

第十二章　五行大義說相對論

§62　五行相生相尅之義……123

§63　交錯量之義……124

§64　明哥斯基相對論……126

§65　量子爲五度體系……129

§66　卐卍化圖之解……130

§67　超相對論使相對論量子論兩者原理化而爲一……135

第十三章　超相對論說明半量子數

§68　電子能力爲半量子奇倍數……137

§69　希魯汀格公式之極坐標算……139

§70　拉普拉斯導誘係數用極坐標……141

第十四章　河洛真諦

§71 河圖為量子洛書為半量子……143
§72 河圖之解為伏義八卦……144
§73 洛書之解為文王八卦……146
§74 洛書之演變……148

第十五章 超相對論三定理

§75 陽一陰二定理……150
§76 三天兩地而倚數……152
§77 波羅吉利之算黑輻射……154
§78 三五相等定理……159
§79 二四同功定理……160
§80 引出哈生保新量子論公式……165

第三卷 五度時間線

第十六章 卐卍化圖引出相對論基本方程式

§81 引出愛因斯坦特殊相對論基本方程式……169
§82 地運速度加於光速仍等光速……171
§83 質量與能力之比為光速之平方……173

第十七章 卐卍化圖引出物質波論基本方程式

§84 引出波羅吉利物質波方程式……176

§85　超相對論建立五度時間線……178
§86　波羅吉利之算……181
§87　羣波之說勿用……184

第十八章　五度時間線攝提物理學基本原理諸公式

§88　物理學基本原理……185
§89　五度時間線使相對論與波動力學兩者基本公式化為一致……186
§90　引出斐馬原則與莫布脫夷原則……187
§91　引出雅谷弼公式……188
§92　引出波耳量子論公式……190

第十九章　超相對論攝提綜合動力學

§93　虛速度定義……194
§94　拉格蘭奇公式之初階形式……196
§95　哈密爾登原則……198
§96　拉格蘭奇公式……199
§97　哈密線登典型公式……202
§98　羅斯公式……204
§99　五度時間線攝提拉格蘭奇公式與哈密爾登典型公式205

第二十章　太極曲線之幾何解析

§100 太極曲線定義 ……210
§101 牛頓研究五種變態三乘曲線 ……211
§102 太極曲線之作成 ……212
§103 太極曲線之算 ……213

第二十一章 太極曲線導出陰陽電子麗子中和子

§104 阿基米底曲線 ……218
§105 阿基米底曲線演出太極圖 ……220
§106 文王八卦爲太極圖 ……221
§107 太極曲線爲電子 ……222
§108 陰陽電子之分辨 ……223
§109 化空間爲零 ……224
§110 麗子與中和子 ……225
§111 證明太極曲線爲第五度 ……226

第二十二章 太極曲線攝提普通相對論

§112 愛因斯坦相等定義 ……232
§113 愛因斯坦普通相對論略說 ……233
§114 超相對論物質解 ……240

第二十三章 神

§115 超絕空時 ……249

§116　爲神爲電 ……………………………………250
§117　四度之算 ……………………………………250
§118　五度之算 ……………………………………254
§119　神之徵 ……………………………………257

第二十四章　宇宙本相

§120　宇宙本相 ……………………………………258

易經科學講

超相對論

第一章

引言

§1 超相對論定義

十九世紀物理學者空間時間別而論之空間爲三度時間不與焉自愛因斯坦創相對論（1905）明哥斯基以時間爲第四度於是相對論之學理彌見固實易說則有五度焉空間三度時間爲之四第五度者謂之電謂之質電與質皆第五度而其間有差別此其大較也一切物理學之定律與公式基於五度之義而立者謂之超相對論

夫電爲第五度之徵物理學者有說之矣卡羅柴始作之（M. Kaluza 1921）克賚恩繼成之（O. Klein 1926）波羅吉利潤色之（Broglie 1927）然其算未閎此雖五度於超相對論之義猶多未逮愛因斯坦普通相對論用彎曲坐標證物質爲四度彎曲未及於五度故亦不爲超相對論之義其惟八卦基於五度電與質皆有徵易說則超相對論

科學者測量而已矣量必有所準故物理學有種種單位而種種單位皆由三種基本單位成之此三種基本單位曰長重時長也者空間三度之所由成時也者相對論之所以爲第四度也而重則地心引力施之有質是故重也者質而已矣易說第五度爲電爲質故五度之義總攝長重時三種基本單位

§2 易與八卦

易也者變易之謂也變而有其序始卒若環終而乃爲首夫是之謂週期八卦一週期而已週期之變言天下之至賾與至動者無所逃焉輓近物理學有兩大學說遠邁疇昔其一爲相對論其一爲量子論而量子論之學理蓋基於週期之變若夫八卦不僅五度之義亦復爲週期於是超相對論乃將相對論與量子論同而化之和而通之縛而壹之庶幾物理學之極則焉

中國有說易者尙其辭不達乎其變不孽幾八卦相與之際此未知夫易也夫易故名也量子者新名也而其謂週期之變則一是故通乎其道謂之易可也謂之量子可也謂之八卦亦可也不知乎其變而天下多得一察焉以自好此莊周所以言道術將爲天下裂吾願今之學者治易求諸物理而治物理者求諸八卦

§3 明誠之教

天命之謂性率性之謂道修道之謂敎自誠明謂之性自明誠謂之敎易之垂敎總攝道器道也者今謂之哲學也器也者今謂之科學也自哲學達於科學誠而明者也自科學達於哲學明而誠者也誠則明矣明則誠矣故科學

哲學一貫也今也不然爲哲學者獨與天地精神往來而不敖倪於萬物爲科學者以參爲驗以稽爲決其數一二三四是也是未嘗爲天地立心爲生民立命所謂通乎天地人而不可須臾離之道未之有得也斯固哲學之有所弗及與其亦科學之有所未樹與

所謂自明誠者物格而後致知致知而後意誠意誠而後心正之謂也世之宗教與哲學者率莫之由而其所道概皆自誠而求明中國之法獨異是蓋始包犧之畫八卦夫八卦若相對論若量子力學若波動力學諸重要公式皆得導演而出斯余實爲之在此簡書僅畢其略夫物理學一切科學之基本也然則明誠之教易之敎也惟中國爲有之格物致知庶幾近矣

或問八卦作於何時余應之曰作於伏羲其時軒轅星座第十四星適在夏至點距今約七千有餘年何以知之曰自易而知或又曰伏羲之世何以知相對論量子力學波動力學曰伏羲所知尙不止此於是縱論古今中國學術嘗能宏道矣而在三代以前文弱之弊不始成周夏商之世吾見其杜權矣戰國之際一切學術造乎其極然而道之華也皆出哲學之論於格物致知所得殊尠逮德下衰降及於漢學術爲直線之墮蓁蕪滿目而易淪於變鬼讖緯淺學不足以言易遂啓王弼之掃象易義亦從此而蔑夫輔嗣之去象也激於前代謬悠之說荒唐之言而矯枉過其正者也夫拘象說易信不可與然而離象言易易亦終無可言唐承其弊謬立學官有宋之學拔於前代倡格物致知之義此中夏學術之根本也雖其格物實未能格物專闡空理無補物理然淹於文敝積之已深而格物致知早爲絕學要亦莫可究詰有明之學無足稱述而王守仁獨賢蓋嘗從事於格物非徒託諸空言也號物之數謂之萬而格之者

孰爲先陽明乃格竹旣而舍之何則吾生有涯而知無涯一一格之日不足力不給陽明終於創知行合一之説是説也於哲學爲無上然而謂之自誠明則可謂之自明誠則未淸之學人詩禮發冢敝精神於蹇淺著述雖多而倒植者過半焉支離弔詭無補於易

§4 伏羲八卦

伏羲之世尙矣而畫八卦符於今物理學最基本之定律斯言也余實知其故夫從事於格物伏羲爲之陽明亦爲之是非異也然而伏羲得之陽明則勿得也何哉曰聖人之心壹而已矣天得壹以淸地得壹以寧人得壹以神夫苟爲壹矣則求乎物之通性而非一一而格之凡物之通性皆占空間於是空間之三度立時間者與空間之觀念連類而至者也莊子曰有實而無乎處有長而無本剽夫有實而無乎處者宇也有長而無本剽者宙也此空間時間之謂也昔者牛頓亦有相對論驗之在車中墜物乃爲垂直不以車行而斜然十九世紀以前視時間爲絶對至愛因斯坦説時間亦相對此今之所謂相對論也明哥斯基説時間爲第四度所謂第四度者與三度皆互交直角而目之所弗見焉聖人之心有壹而已則時間者不異空間三度而必爲第四度知時間之爲第四度則一切相對論之理論與公式皆得出矣且其用心不止此若質若電雖有四度仍無得釋則亦壹而已矣是必爲第五度而與四度皆互交直角於是一切問題無不解者而在今物理猶有未樹也

五度之義旣立不獨在形而下者之謂器且必達於形而上者之謂道古者電伸神三者皆作申而音讀若田莊子其行闐闐其視顚顚皆眞讀若田然

則神卽電乎曰皆第五度而有區別若時間與光並在第四度而非爲一也神與電之在第五度亦若斯

甘地有言神者光也而非肉眼所見之光在其至弱之分猶强於肉眼所見光者幾萬倍斯其言也則似之矣然則神可得見乎曰人能潔己以進則無不可夫謂之潔己非直身而已也而必潔其心潔其性未有毫不潔而獲見神者也

管子輕重戊篇云『虙戲作造六峜以迎陰陽』淮南書云『伏羲爲之六十四變』八卦出於陰陽二峜謂之兩儀重峜而有四象三重而生八卦曰乾兌離震巽坎艮坤其序陽左陰右見圖 1

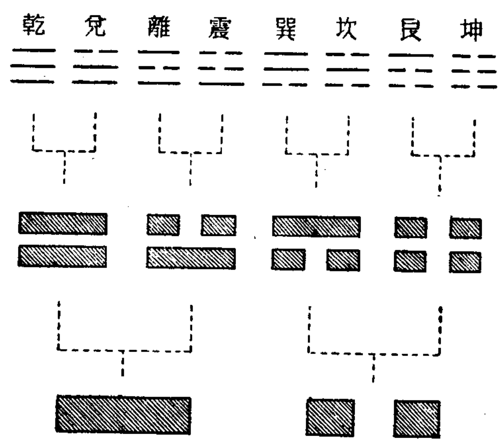


圖 1　兩儀四象八卦

伏羲八卦布爲圓陣陽左旋陰右旋乾兌離震屬陽而左巽坎艮坤屬陰而右見圖 2

圖2　伏羲八卦

震爲一度兌爲二度乾爲三度離爲四度於是巽坎艮坤合一而爲第五度反之巽爲一度艮爲二度坤爲三度坎爲四度於是乾兌離震合一而爲第五度

§5　文王八卦

說卦傳曰帝出乎震齊乎巽相見乎離致役乎坤說言乎兌戰乎乾勞乎坎成言乎艮此文王八卦之序也見圖 3

圖3 文王八卦

周易二萬四千一百有七字其中文王所作六十四卦繫辭都七百一十五字然而文王八卦則非其所作何以知之洪範九疇卽是洛書洛書卽文王八卦是則文王八卦不待文王而後興大禹之世旣已有矣所謂文王有文德而王者之通稱猶莊周所說玄聖素王之類也是故孔子曰文王旣沒文不在茲乎

§6 孔子八卦

伏羲文王兩八卦外尙有孔子八卦爲孔子所作從來未曾有人道及易經本文亦未著一言此八卦由序卦中導出之其序曰乾坎震離巽艮兌坤見圖4

孔子作十翼而序卦傳與居一焉此聖人之重視次第不欲人之亂其序也說卦傳曰天地定位山澤通氣雷風相薄水火不相射此言伏羲八卦伏羲文王兩八卦皆有所述獨其自所作者未曾有說聖人之自謙與然旣安排於序卦之中聖人之心萬世之後知其解者猶旦暮遇之也而序卦以未濟終猶自謙也示於辨析宇宙眞理發揮未盡故終於未濟其實孔子八卦雖未置一言而宇宙眞理爲之全解與伏羲文王之創作同功

圖4 孔子八卦

伏羲八卦爲量子文王八卦爲電子孔子八卦爲原子夫是之謂道生一一生二二生三三生萬物如原子核之組織化學同位素之究竟今物理學未盡能知而孔子八卦全釋之又如化學元素週期表孟特利葉夫(Mendelejeff 1870)創作而後化學乃得昌明然分爲八屬以作八行是以八爲週期而計有七列七則未作週期視之故橫列之中一至八爲週期而縱行之中一至七不爲週期然孔子八卦縱橫排之咸成週期乃得九十二之數爲總週期今日由於原子能之研究以人工蛻變而得第九十三第九十四元素(neptunium $_{93}Np^{239}$, plutonium $_{94}Pu^{239}$)然而自然見象恐仍將以九十二爲週期自氫以至鈾也河洛之數於此符之

$$_{92}U^{238}+{}_0n^1\longrightarrow{}_{92}U^{239}+\text{gamma rays}$$

$$_{92}U^{239}\xrightarrow[23\text{min}]{}{}_{93}Np^{239}+{}_{-1}e^0$$

$$_{93}Np^{239}\xrightarrow[2.3\text{ days}]{}{}_{94}Pu^{239}+{}_{-1}e^0+\text{gamma rays}$$

又環繞原子核之電子數依孔子八卦推得第一殼二第二殼八第三殼十八第四殼二十第五殼二十第六殼十八第七殼六與物理學之說有所異同

在此簡書關於孔子八卦之種種將不及論余於他處述之矣(見拙著綜合物理學)

§7 靈質溝通

神者最後之眞而萬有一切之絕大融和神與電皆第五度而神中心坐標電則坐標在周光與時皆第四度而光中心坐標時則坐標在周神無形而電呈象爲光爲熱此形上形下之辨也光可見而時不可覩故中心坐標在四

度則顯在五度則隱在周坐標在五度則著在四度則微電與質皆五度之在周坐標而作用不同其如是亦可以覘靈質之溝通矣

荀子曰『君子養心莫善於誠致誠則無他事矣唯仁之爲守唯義之爲行誠心守仁則形形則神神則能化矣誠心行義則理理則明明則能變矣變化代興謂之天德天不言而人推高焉地不言而人推厚焉四時不言而百姓期焉夫此有常以至其誠者也君子至德嘿然而喻未施而親不怒而威夫此順命以愼其獨者也善之爲道者不誠則不獨不獨則不形不形則雖作於心見於色出於言民猶若未從也雖從必疑天地爲大矣不誠則不能化萬物聖人爲知矣不誠則不能化萬民父子爲親矣不誠則疏君上爲尊矣不誠則卑夫誠者君子之所守也而政事之本也唯所居以其類至操之則得之舍之則失之操而得之則輕輕則獨行獨行而不舍則濟矣濟而材盡長遷而不返其初則化矣』

是故躬行君子出乎口箸乎心布乎四體形乎動靜內以化己外以化人斯謂知行合一斯謂誠之至也得理而明若夫知行不一諸諸然而沸有喙三尺不誠無物而欲以勝人爲實譬諸猶一吷耳是故君子之所弃而愚者拾以爲己寶以是觀之陽明之學聖人之學也與是故誠而明明而誠其事爲一矣學者毋拘乎其迹而會通乎其本斯可矣

國之不治何也一言蔽之曰無治術治術之不立學術之匱也學術之不講心術之邪也未有心術不正而學術能正者也未有學術不正而治術能正者也治亂之幾概可見矣故曰意誠而後心正政事之本也而亦妙道之行也

§8　科學世界

周易者姬周之易也周徧咸三者異名同實故周易者週期之變之謂也是兩釋之伏羲文王孔子之八卦皆週期之變而已耳宇宙之間萬有一切莫不爲週期之變文王八卦作於何時余知之而無以爲說何則史闕有間不足徵也然八卦之昌明有其期伏羲距孔子約五千年是則文王八卦宜若在其中間約當黃帝之世以是說之八卦昌明之期約二千五百年是言也無徵余嘗妄言之而以妄聽之奚

徵諸往而知來者二千五百年而有八卦興焉自孔子至於今又將二千五百年矣亦有新八卦乎曰此所未能蓋八卦排列之法有四萬三百二十此數以一二三四以至於八聯乘而得在此數中其能發揮宇宙眞理者惟有三耳伏羲文王孔子之八卦也過此以往未之或知也

然則何以說今當在八卦昌明之期曰八卦者科學也科學之昌明非卽八卦之昌明乎而今非將入於科學之世界乎然而猶有未樹也其將有待於八卦與科學之化而爲一乎夫然而使科學者稠適而上遂也斯則舉世之學者與有責非一方一域之事夫學術者無種姓之分無圍域之畛同之於世界而公之於宇宙者也

或曰科學愈明而假夫禽貪者器則何貴乎有科學曰科學無罪也科學者明理以致用耳所以謂之器也是猶水火水火能生人能殺人惟在善用之與否耳何如則善用此心術之所以爲要也八卦者總攝道器視科學尤爲基本而非若科學之一偏於用也方今之世科學愈明冀得免於詬厲則必求諸八卦斯學士之任也而不然者虎兕出於柙圭玉毀於櫝中是誰之過與

第二章

易方陣之解析

§9 易方陣

伏羲八卦之序曰乾兌離震巽坎艮坤布列縱橫縱謂之行衡謂之列凡八行八列謂之易方陣見圖 5

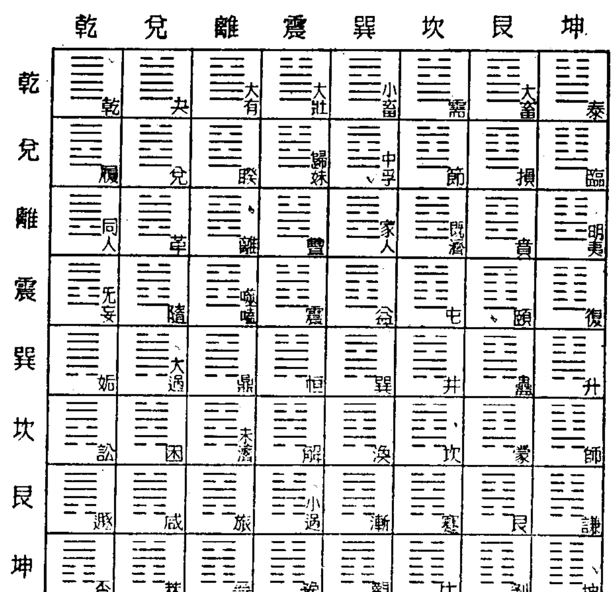


圖 5　易方陣

§10 交錯線迹

方陣方位六十四謂之罫罫有一卦凡六十四卦陰陽相錯兩而爲對若乾與坤若坎與離皆交錯卦也此巻之陽彼巻之陰也易方陣爲四重相錯之卦皆在同重聯之以線謂之交錯線迹交錯線迹皆

過中心見圖6

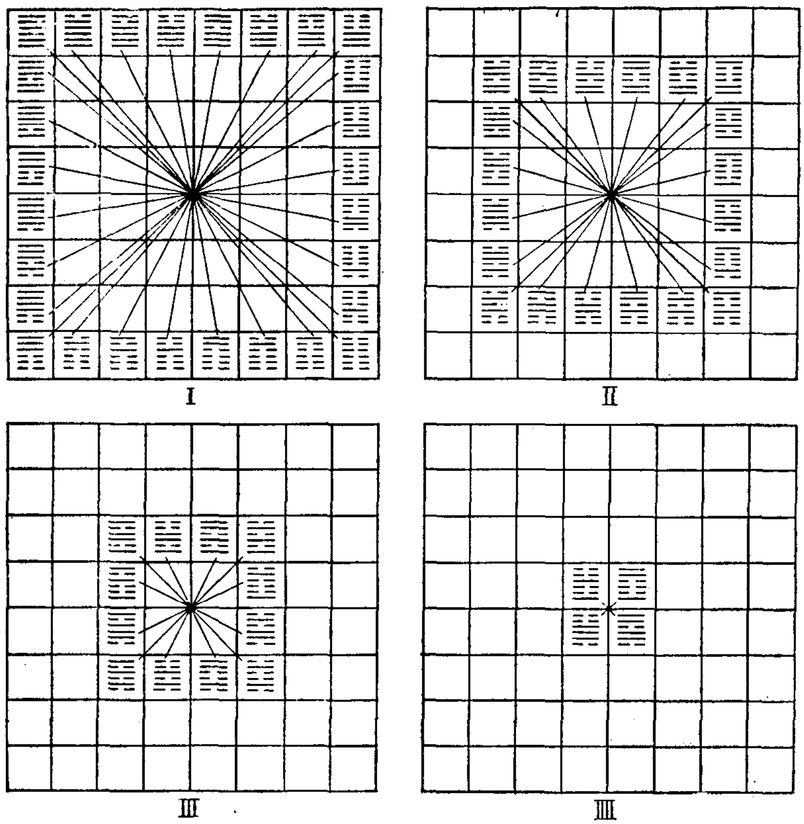


圖6　易方陣之交錯線迹

§11　交綜線迹

六爻之倒因別成卦謂之交綜聯之以線謂之交綜線迹屯之倒爲蒙師之倒爲比皆交綜卦也六十四卦則有交綜者五十有六其不得交綜者有八焉曰乾坤坎離中孚小過大過頤此八者順倒視之皆一也名之曰自綜卦

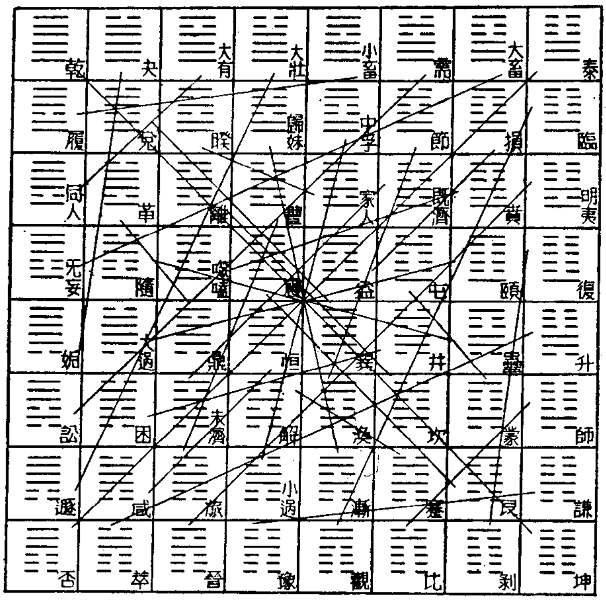


圖 7 易方陣之交綜線迹

交錯焉而又交綜者泰否也既濟未濟也隨蠱也歸妹漸也凡八卦名之曰錯綜卦凡交綜之卦五十有六兩而爲對則二十有八益以自綜者八則三十有六易上下經皆十八是均分也錯而兼綜者以綜論焉

若易方陣聯其交綜其自綜者聯其交錯如是諸線所示至紛歧也見圖7 然而其中有條理焉試以方中容方三重取之謂之外方中方內方則可挈幾焉見圖 8

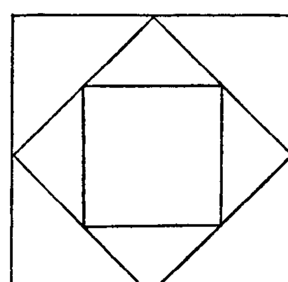


圖8 方中容方

右圖外方所屬二十有八卦曰乾坤泰否師比需訟同人大有夬姤明夷晉履小畜復剝豫謙大壯遯大畜无妄升萃臨觀中方所屬十有二卦曰坎離既濟未濟中孚小過大過頤隨蠱歸妹漸內方所屬八卦四在方之內四在方之外曰兌巽震艮咸恆損益除三方外有十六卦介在中方內方之間曰屯蒙鼎革噬嗑賁

井困家人睽蹇解節渙旅豐其聯皆交綜線迹而自綜八者聯其交錯外方之線皆在外方中方之線皆在中方內方之線外出爲聯三方及羨餘者十有六卦示如圖 9

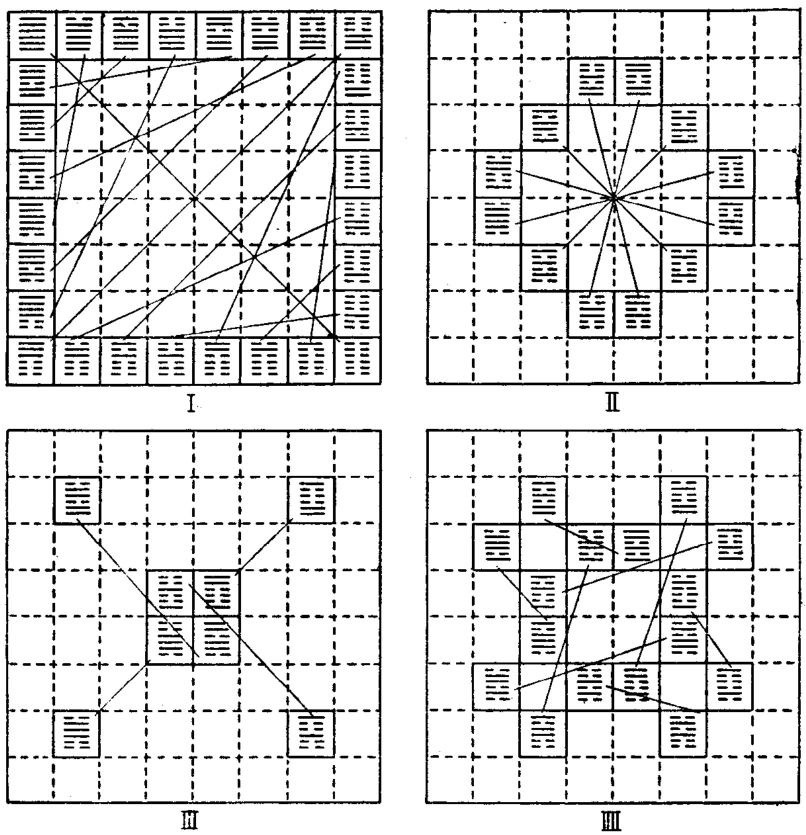


圖 9　交綜線迹之解析

外方二十八卦乾坤泰否對角線也大有與同人需與訟明夷與晉師與比之四者並行於泰否線而與乾坤線爲直角夬與姤履與小畜二線相交豫

與謙剝與復二線相交大畜與无妄遯與大壯二線相交臨與觀升與萃二線相交凡交點四皆在乾坤線

中方十有二卦線皆過中心墨子上經云『圜一中同長也』今以方圖示圓形不得正圓然諸線萃中則一中矣而交錯二卦皆自中同長是亦以示爲圓矣故中方者示爲圓也內方四卦其聯在外故八焉

§12 卐卍之來歷

三方之外尙有十六卦聯之交綜線迹則得兩形一左轉一右轉若風車之旋今以圖 9 之 IV 分爲兩圖示如圖 10

圖 10 之 I 與 II 示左右旋除交綜線外余又聯之以兩線遂成卐字視之若左旋而卍字者若右旋惟斯字也員輿之上種姓無文獷咸有之矣問所由來則對曰來自易方陣由此卍卐兩形之方陣導出量子光波陰陽電子諸方陣焉

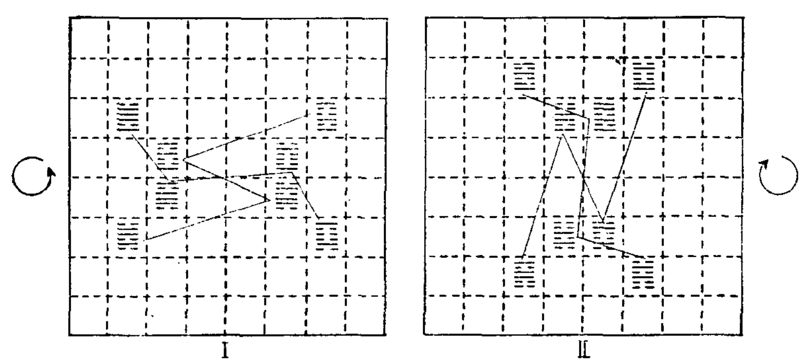


圖 10 卐方陣與卍方陣

凡交錯者波行也振相相反兩波爲交錯交綜者順違也自甲至乙謂之

順則自乙至甲謂之倒易方陣所以有交錯交綜兩重關係者物固有機速與波速二者相麗機速波速之乘爲光速之平方 $uv=c^2$ 此物質波論方將說明玆略示易方陣錯綜線迹而於算數容諸後論

第 三 章

河圖之統計力學

§13 易統計方程式

易有統計方程式出於河圖之數天一地二天三地四天五地六天七地八天九地十凡天地之數五十有五此卽自一至十之總和以式書之如下示

$$S=\frac{x(x+1)}{2} \quad \text{〔1〕}$$

上式 S 爲總和 x 爲任意數若 $x=10$ 則 $S=55$ 於是易之統計方程式如下示

$$W=\binom{S_1}{N_1}\binom{S_2}{N_2}\binom{S_3}{N_3}\cdots\cdots\binom{S_i}{N_i}=\prod_i\binom{S_i}{N_i} \quad \text{〔2〕}$$

總量子數爲 i 之分子統計或是率爲 $\binom{S_i}{N_i}$ 故 W 爲總分配或是率 Π 爲聯乘記號而上式記號以下式表之

$$\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots m} \quad (1)$$

命 $N_1=1, N_2=2, N_3=3\cdots\cdots N_i=i$ 則〔2〕式爲下式

$$W=\frac{\underline{|S_i}}{\underline{|N_1}\,\underline{|N_2}\,\underline{|N_3}\cdots\underline{|N_i}} \quad \text{〔3〕}$$

上式 $\qquad S_i=\frac{i(i+1)}{2}=\sum_i N_i=\mathcal{N} \quad (2)$

由是〔3〕式卽典型統計方程式如下式

$$W=\frac{\underline{|\mathcal{N}}}{\underline{|N_1}\,\underline{|N_3}\,\underline{|N_3}\cdots\underline{|N_i}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔4〕$$

故易統計方程式者亦卽典型統計方程式也

§14　易統計方程式總攝三種統計

典型統計學以單體爲各不相同若有 N 單體之數以 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_N$ 記之置於 Z 間格之數以 $b_1, b_2, \cdots\cdots b_Z$ 記之則置 a_1 於 b_1 置 a_2 於 b_2 者其排列之法視置 a_1 於 b_2 置 a_2 於 b_1 者不同而一單體落於空間格或非空間格者其機惟均所謂非空間格卽其間格已先有他單體居之其數或一或多於一

新統計學以單體爲各各相同故 $a_1, a_2 \cdots\cdots a_N$ 一一無辨均之爲 a 由是置 a 於 b_1 置 a 於 b_2 而非若典型統計學之有 a_1a_2 之分然新統計學亦有兩說其一凡單體可落於空間格或非空間格爲此說者蒲斯 (Bose) 與愛因斯坦主之其一凡單體惟可落於空間格故一間格中僅能容一單體爲此說者柏里(Pauli)狄拉克(Dirac)費宓(Fermi)主之

易統計方程式自 1 起算則符於典型統計學自 0 起算則符於費宓統計學其式下示

$$W_c=\binom{S_0}{N_0}\binom{S_1}{N_1}\binom{S_2}{N_2}\cdots\cdots\binom{S_i}{N_i}=\prod_{i\geqq 0}\binom{S_i}{N_i} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

而

$$S_i=\frac{(i+1)\ (i+2)}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

上式 W_c 爲費宓統計學總分配或是率

命 a 爲一單體之容積則在典型統計學自 1 起算者 a 爲 0 在費密統計學自 0 起算者 a 爲 1 如圖 11 示之

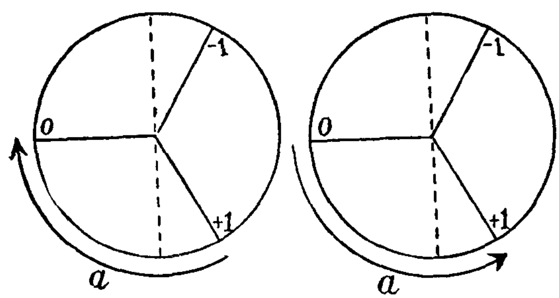


圖 11　自 0 自 1 之比較

左圖 -1，0，+1 之向爲亥卯未謂之三合三作週期則 3 爲 0 而 2 爲 -1 卯爲原子之向未爲電子之向亥爲光量子之向此在孔子八卦說明之由是 a 爲 0 者爲典型統計學而適用於單原子之分子氣體 a 爲 1 者爲費密統計學而適用於電子氣 a 爲 -1 者爲蒲斯統計學而適用於光量子氣三種統計咸有所適而非相通索麥斐爾特(Sommerfeld) 在其所著金屬電子論(1927)說明費密統計學之重要應用金屬有自由電子爲電與熱傳導之因舊說在 T 溫度時自由電子之動能與單原子之分子同並爲 $\frac{3kT}{2}$ 故典型統計學之算自由電子對金屬比熱必引出一不可解之數此在費密統計學其難立解蓋電子質量小於最輕原子者千八百倍依費密之說室溫度時必在完全頽變狀態而在弱頽變之例在同溫度同質點數時對電子氣之修正項大於氦氣者十萬倍但在强頽變之例比熱與質量爲比例故與金屬自身之比熱爲比較時則電子之比熱可略

典型統計方程式所示入單體中能力爲 ε_1 者其數 N_1 爲 ε_2 者其數 N_2 以至爲 ε_i 者其數 N_i 故排列總數如下式

$$\frac{\underline{|\mathcal{N}}}{\underline{|N_1}\,\underline{|N_2}\,\underline{|N_3}\cdots\underline{|N_i}}=\frac{\underline{|\mathcal{N}}}{\prod_i \underline{|N_i}} \cdots\cdots\cdots (5)$$

若 N_i 之單體置於 Z_i 之間格則有排列之法爲 ${}^{Z_i}P_{N_i}$ 而 P 爲排列法(permutation)之記號於是單體排列與間格排列兩者之合爲下式

$$W=\frac{\underline{|\mathcal{N}}}{\prod_i \underline{|N_i}}\prod_i {}^{Z_i}P_{N_i} \cdots\cdots\cdots〔5〕$$

因 a 爲一單體之容故排列法之算爲下式

$${}^{Z_i}P_{N_i}=Z_i(Z_i-a)(Z_i-2a)\cdots(Z_i-(N_i-1)a) \cdots\cdots〔6〕$$

若 $a=0$ 則得下式　${}^{Z_i}P_{N_i}=Z_i^{N_i}$ $\cdots\cdots\cdots(6)$

但 N_i 者爲有 ε_i 能力之單體數故作下式

$${}^{Z_i}P_{N_i}=Z_i^{N_i a} \cdots\cdots\cdots (7)$$

因 $a=0$ 故　$\prod_i {}^{Z_i}P_{N_i}=\prod_i Z_i^{N_i a}=1$ $\cdots\cdots\cdots(8)$

由是〔5〕式爲下式而卽典型統計方程式

$$W_A=\prod_{i\geqq 1}\binom{S_i}{N_i}=\frac{\underline{|\mathcal{N}}}{\prod_i \underline{|N_i}} \cdots\cdots\cdots〔7〕$$

上式 W_A 爲典型統計學總分配或是率

若$\mathcal{N}$單體各各不同則排列法爲$\underline{|\mathcal{N}}$若$\mathcal{N}$單體各各相同則〔5〕式當以$\underline{|\mathcal{N}}$除之故在費密統計學則爲下式

$$W_c=\prod_i\frac{1}{\underline{|N_i}}{}^{Z_i}P_{N_i}=\prod_i {}^{Z_i}C_{N_i}=\prod_i\frac{\underline{|Z_i}}{\underline{|N_i}\,\underline{|Z_i-N_i}} \cdots\cdots〔8〕$$

上式 C 爲組合法(combination)之記號而 ${}^{n}C_{m}$ 等於(1)式卽 $\binom{n}{m}$ 之別書

在蒲斯統計學 $a=-1$ 故排列法之方程式〔6〕變爲下式

$$^{Z_i}P_{N_i}=Z_i(Z_i+1)(Z_i+2)\cdots(Z_i+N_i-1) \quad\cdots\cdots(9)$$

而〔5〕式乃爲下式

$$W_B=\prod_i \frac{\lfloor Z_i+N_i-1}{\lfloor N_i \lfloor Z_i-1} \quad\cdots\cdots〔9〕$$

上式 W_B 爲蒲斯統計學總分配或是率

三種統計方程式惟蒲斯之式 $a=-1$ 爲適用於放光見象故首先發明量子者博郎克也(Planck)而其著名之公式在上述三種統計惟〔9〕式能引之

§15 引出博郎克量子方程式

博郎克發明量子論(1900)而後多數學者實驗證明輻射原子之實際存在與電子原子之存在同樣確切輻射原子者通常稱曰光量子 (Light-quantum) 亦稱之曰光子 (Photon) 玆由統計方程式引出博郎克之著名公式如下算

由〔6〕式得下式

$$^{Z_i}P_{N_i}=a^{N_i}\frac{Z_i}{a}\left(\frac{Z_i}{a}-1\right)\cdots\cdots\left(\frac{Z_i}{a}-N_i+1\right)\cdots\cdots(10)$$

用 Γ 作涵數號乃得下式

$$^{Z_i}P_{N_i}=a^{N_i}\frac{\Gamma\left(\frac{Z_i}{a}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{Z_i}{a}-N_i+1\right)}\cdots\cdots(11)$$

故〔5〕式爲下式

$$W=\underline{|\mathcal{N}}\prod_i\frac{a^{N_i}}{\underline{|N_i}}\cdot\frac{\Gamma\left(\dfrac{Z_i}{a}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{Z_i}{a}-N_i+1\right)}\cdots\cdots\cdots(12)$$

上式以$\underline{|\mathcal{N}}$除之則爲$\mathcal{N}$單體各各相同而$\Gamma(x)$以x^x代之得下式

$$W=\prod_i\frac{Z_i^{\frac{Z_i}{a}}}{N_i^{N_i}\,(Z_i-aN_i)^{Z_i/a-N_i}}\cdots\cdots\cdots(13)$$

由是　$$\log W=\frac{1}{a}\sum_i Z_i\log Z_i+\sum_i\Big[-N_i\log N_i$$

$$+\left(N_i-\frac{Z_i}{a}\right)\log(Z_i-aN_i)\Big]\cdots\cdots\cdots(14)$$

而　$$\delta\log W=\sum_i\delta N_i[-\log N_i+\log(Z_i-aN_i)]\cdots\cdots\cdots(15)$$

故　$$\delta\log W=\sum_i\delta N_i\log\frac{Z_i-aN_i}{N_i}=0\cdots\cdots\cdots(16)$$

命E爲總能力則　$$E=\sum_i\varepsilon_i N_i=\sum_i N_i h\nu_i\cdots\cdots\cdots(17)$$

故　$$\delta E=\sum_i\varepsilon_i\,\delta N_i=0\cdots\cdots\cdots(18)$$

上式以β乘之由(16)(18)兩式得下式

$$\beta\,\delta E=\delta\log W\cdots\cdots\cdots(19)$$

卽　$$\beta\,\varepsilon_i=\log\frac{Z_i-aN_i}{N_i}\cdots\cdots\cdots(20)$$

故　$$e^{\beta\varepsilon_i}=\frac{Z_i-aN_i}{N_i}\cdots\cdots\cdots(21)$$

而　$$N_i=\frac{Z_i}{e^{\beta\varepsilon_i}+a}\cdots\cdots\cdots(22)$$

由上式得知若 $a=-1$ 則變爲博郎克公式

如通常所知 $Z_i=\frac{4\pi\nu_i^2}{c^3}$ 而 $\beta=\frac{1}{kT}$

故得下式 $N_i\varepsilon_i=\frac{8\pi\nu_i^3h}{c^3(e^{h\nu_i/kT}-1)}$ ……〔10〕

上式爲博郎克方程式視(22)式其值爲倍因光量子在第四度也此爲易說陽一陰二之義其說後論

白利羅英 (Brillouin) 曾爲比較三種統計上用算法揚推其義而算非盡同

第四章

易方陣爲球面排列

§16 易方陣之統計

由易統計方程式(§13〔1〕式)若命 x 之値爲 1,2,3,4 則總和 S 之値爲 1,3,6,10 倍之則爲 2,6,12,20 更依其序退下一級加於原値則爲 2,8,18,32 此電子繞核數也第一殼有兩電子第二殼八第三殼十八第四殼者有三十二電子之位置而不得滿住依孔子八卦所算最多可住二十電子由〔1〕式推之第五殼電子之位置有五十第六殼七十二第七殼九十八然皆不得滿住孔子八卦所算第五殼電子最多可住亦二十第六殼十八第七殼六夫總和 S 之値倍之者電子之自旋有左右也退下一級加於原値者電子之自旋平面對於軌道平面有左傾右傾之別也左傾右傾之數惟均而有中間垂直者非左非右若亦歸之於右則右多於左兩項之數遂異故退一級而相加焉

若以 2,8,18,32 之數再倍之則爲 4,16,36,64 此易方陣之交錯線迹有四重也 (§10 圖 6) 4 者圖 6 之 IV 震巽恆益四卦也 16 者圖 6 之 IV 與 III 兩者合也而 III 有十二卦曰坎離既濟未濟鼎屯噬嗑井豐渙家人解 36 者圖 6 之 IV, III, II 三者之合也而 II 有二十卦曰咸損兌艮中孚小

過歸妹漸隨蠱大過頤節旅睽蹇賁困蒙革 64 者圖 6 之 IV, III, II, I 四者之合也而 I 有二十八卦曰乾坤泰否夬剝大有比大壯觀小畜豫需晉大畜萃履謙同人師无妄升姤復明夷訟臨遯此四重者爲同心圓球之面積而六十四卦皆在第四重之球面不以之爲方也何以倍於繞核電子之數曰繞核之電子則其爲陰者也而卦兼備於陰陽此其所以爲倍也

§17 球面排列與 π 數

一氣體中分子間之能力分配爲球面排列故六十四卦亦爲球面排列而謂之第四重者皆在第四重之球面也第三重之球面爲三十六卦第二重之球面爲十六卦第一重之球面爲四卦此四重者同心球也其距中心之長度設第一重之半徑爲一則第二重之半徑爲二第三重之半徑爲三第四重之半徑爲四

球面積之算爲 $4\pi r^2$ 半徑爲 r 而徑與周之比率爲 π 於是第一重之 r 爲 1 故球面積爲 4π 第二重之 r 爲 2 故球面積爲 16π 第三重之 r 爲 3 故球面積爲 36π 第四重之 r 爲 4 故球面積爲 64π 如是者 π 亦可視之爲單位面積謂之罫罫則有一卦

周徑之比率爲 π 者南齊祖冲之求得密率爲下值

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

在西洋之發明者爲符泰(Francisco Vuta 1579) 後於冲之者千有餘年其法以 $6 \times 2^{16} = 393216$ 多邊等邊形求周徑之比得如下數

$$> 3.1415926535$$

< 3.1415926537

余於周鬴算得黃鐘之長爲 24 生的密達而知正確圓率在中國早已發明不待冲之而後得也冲之之率已第二次之發明矣是猶冲之之圓率既明之後宋明後學猶不知用反自信其不正確之圓率然則圓率之既得而復失固不足異次復黃鐘之長失傳已久秦漢以降累朝尋求終未有獲余今得之周禮之書之價值亦可見矣後之學人汲綆不修妄譏爲僞其可休矣

§18　階度算法與易方陣

物理學之新算法有向量算法者階度之算其中之一也余於說階度算法之前先述一簡單之例如圖 12 所示 AB 爲地平 CB 垂直於地平設有物其重爲 m 自 B 舉之而至 C 則因逆於地心引力之向其所作之功等於 mgh 地心引力之常數爲 g 而 $h=BC$ 設此物自 A 舉之沿 AC 之程而至 C 則所作之功仍爲 mgh 而 h 仍等於 BC 是何也蓋物自 A 至 C 等於行曲折之路自 A 至 b_1 自 b_1 至 c_1 自 c_1 至 b_2 循虛線所示之程以至 C 然 c_1b_2 並行於 AB 而 b_2c_2 並行於 BC 故終其曲折之程等於自 A 至 B 而至 C 此卽 AC 之程等於 AB 與 BC 兩線之程也然物行於 BC 則其所作之功爲 mgh 而行於 AB 則無功何也蓋 AB 之向垂直於地心引力所施之向也凡行程垂直於力向者無功

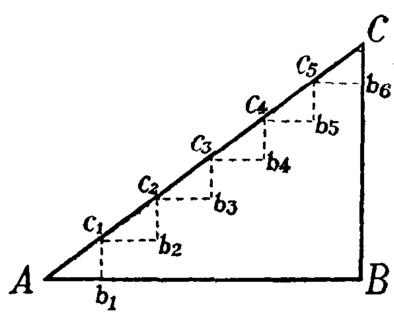


圖12　自地舉重斜直同功

AC 之長均分若干段如 c_1c_2 等所示者此均分之段可使之爲無限小若分段無限小則曲折之程幾近於 AC 直線故行於 AC 之程者勿異曲折無限小之程也

易方陣爲方面積乾坤與泰否兩對角線之交點在其中央由此交點立一垂直於平面之線在此線上任擇一點以爲中心而命之曰 0 則自 0 至交點之距爲最短在此方面積者離交點愈遠則其至 0 之距亦愈長設 0 爲力之中心若地心引力者然則行於斜線者與行於垂直之線者其所作之功惟均以功論之斜直相等由是六十四罫至 0 之距視爲等長既其爲一中同長則變爲圓球之半徑而易方陣遂爲圓球之面

§19 數量場之階度

場也者謂一區域在其中每點皆有一定量之值而此值隨處而異若此爲數量則謂之數量場爲向量則謂之向量場

在數量場任擇一點曰 P 作一面經過 P 點而此面代表各點其幾何位置使其數量 S 之值均與在 P 點者同此面謂之經過 P 點之場衡面 (field-level) 自 P 點作一直線垂直於場衡面沿此直線作一向量其值等於每單位長度所表數量之增值其向符於數量增值之向由此法則數量場之每點皆得以一向量表之此向量稱曰數量場之階度 (gradient of the scalar field) 其記號爲 grad S

立一坐標系 $\xi, \eta\, \varsigma$ 爲三軸使 ξ 與 η 兩軸爲場衡面上在 P 點之切線而 ς 軸則在數量增值之向於是階度之分向如下式

$$\text{grad}_\xi\ S=0,\ \ \text{grad}_\eta\ S=0,\ \ \text{grad}_\zeta\ S=\frac{dS}{d\varsigma} \quad\cdots\cdots(1)$$

除場衡面之經過 P 點者其數量之值爲 S 外復取相鄰之場衡面其數量之值爲 $S+dS$ 使 $d\varsigma$ 爲 ς 軸上兩場衡面之欄截自 P 點作任何線命曰 x 軸而 dx 爲兩場衡面之欄截(圖 13 示之)乃有下式

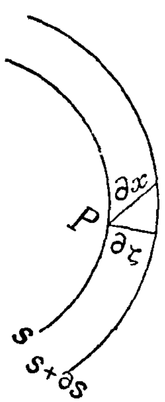


圖13　兩場衡面之欄截

$$dx=\frac{d\varsigma}{\cos(\varsigma,x)} \quad\cdots\cdots(2)$$

此因 ς 軸垂直於兩場衡面而形成直角三角形故在 x 之向數量增值爲下式

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{dS}{d\varsigma}\ \cos(\varsigma,x)\quad\cdots\cdots(3)$$

立一任意坐標系 x,y,z 而自 ξ,η,ς 坐標系之階度分向移之於 x,y,z 坐標系因 ξ 與 η 分向皆爲 0 故如下式

$$\left.\begin{aligned}\text{grad}_x S&=\text{grad}_\zeta\ S\ \cos\ (\varsigma,x)\\ \text{grad}_y S&=\text{grad}_\zeta\ S\ \cos\ (\varsigma,y)\\ \text{grad}_z S&=\text{grad}_\zeta\ S\ \cos\ (\varsigma,z)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4)$$

由(1)式與(3)式得下式

$$\left.\begin{aligned}\text{grad}_x\ S&=\frac{\partial S}{\partial x}\\ \text{grad}_y\ S&=\frac{\partial S}{\partial y}\\ \text{grad}_z\ S&=\frac{\partial S}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

是故一數量之階度分向乃依坐標系而部分引出者

在向量 A 之場作一曲線自 P_1至 P_2積分曲線與向量之空間變值之數量乘(scalar product)謂之沿曲線向量之線積分作式如下

$$\int_{P_1}^{P_2} A\, ds = \int_{P_1}^{P_2} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad \cdots\cdots(6)$$

若向量 A 爲一數量之階度由(5)式得下式

$$\int_{P_1}^{P_2} \operatorname{grad} S\, ds = \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz \right) \quad \cdots\cdots(7)$$

若一點之數量值全依其位置而定則有下式

$$\frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz = dS \quad \cdots\cdots(8)$$

故以 S_1, S_2 爲 P_1, P_2 兩點數量 S 之值則有下式

$$\int_{P_1}^{P_2} \operatorname{grad} S\, ds = S_2 - S_1 \quad \cdots\cdots(9)$$

是故階度線積分之值全依兩點數量值之差積分取於曲線之作於兩點間而對曲線之長與其形式全無關係

若 P_1 與 P_2 相距極近自 P_1 至 P_2 之向以 α_{12} 表之由(9)式得下式

$$S_2 = S_1 + \alpha_{12} \operatorname{grad} S \quad \cdots\cdots(10)$$

一特殊之例爲形成場之數量但爲自一定點之距離之涵數於是場衡面爲球面

若 $$S = f(r) \quad \cdots\cdots(11)$$

在任何坐標其原點與一定點相符合者

$$\operatorname{grad}_x S = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} \quad \cdots\cdots(12)$$

而 $f'(r)$ 爲 $f(r)$ 所引出

因　$$r^2=x^2+y^2+z^2 \qquad (13)$$

故　$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r} \qquad (14)$$

於是　$$\mathrm{grad}_x S=f'(r)\frac{x}{r} \qquad (15)$$

而　$$\mathrm{grad}\, f(r)=f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (16)$$

上式 $\mathbf{r}/r$ 爲決定場點與一定點之距之向之單位向量

若 $f(r)=r$ 則因 $f'(r)=1$ 而得下式

$$\mathrm{grad}\; r=\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (17)$$

是故自一定點之距之階度等於單位向量

若　$f(r)=\frac{1}{r}$ 則因 $f'(r)=-\frac{1}{r^2}$ 而得下式

$$\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad [11]$$

是故自一定點之距之倒數之階度等於自一定點之距之平方之倒數

由上之說得知階度算法實符於易方陣而四重球面者皆場衡面也其自中心四射之向量垂直於場衡面者爲球半徑而即數量場之階度所謂交錯線迹兩半徑之在一直線也

第五章

易方陣詮證

§20 易方陣優於今方陣

方陣算法者近世之算法也自作始以迄今纔二百餘年耳其用之於物理哈生保實始之(Heisenberg 1925)而證電子之能力爲半量子之奇倍數希魯汀格以物質波之理論亦算出之 (Schrödinger 1925) 哈生保學說發見未久波綸(Born)約旦(Jordan) 以方陣算法更進求之於是新物理學之算遂不得不恃方陣而致之矣

八卦縱橫布列方陣其由久矣而用之於量子電子之說明以視今所用於物理之方陣尤爲便捷斯則由交錯交綜之兩重關係而兩重關係之所以能於同一方陣中顯出之者實由其方陣之組織視今所用甚進步之故也

§21 今之方陣

方陣云者 (Matrix) 亦曰行列式用兩足指數表項值縱乃謂之行衡乃謂之列項乃謂之元示之如下式

$$A=(a_{nm})=\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02}\cdots\cdots a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

若方陣之元倒其足指數之序而其值不變謂之對稱方陣對稱方陣代表數量式如下

$$A_{hk}=A_{kh}\cdots\cdots(2)$$

若方陣之元倒其足指數之序其值不變而其號變謂之反稱方陣反稱方陣代表向量式如下

$$A_{hk}=-A_{kh}\cdots\cdots(3)$$

反稱方陣對角線上之元皆等於零蓋 A_{hk} 等於 $-A_{kh}$ 則 A_{hh} 等於 $-A_{hh}$ 惟可為零式如下

$$A_{hh}=0\cdots\cdots(4)$$

方陣之元惟對角線者有值他皆無值則謂之對角方陣若對角方陣其對角線上諸元之值皆等於1則方陣之值亦為1謂之單位方陣單位方陣以 ε 命之

§22 向量解析

一向量場在其中立一坐標系則 A 向量之三分向可視之為坐標系之函數於是形成部分導誘數者有九焉而可以列之若方陣

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z}\\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{vmatrix}\cdots\cdots(5)$$

上列方陣若僅取其對角線上之值而相加則所得之值必為一數量而

不繫於坐標系何則對角方陣猶對稱方陣而對稱方陣爲數量於是此數量者命之曰向量之散佈(the divergence of the vector) 用 div A 爲記號式如下示

$$\operatorname{div} A=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad [12]$$

上列方陣若取其對角線之外之值使之兩兩爲對則旣視對角線之值爲零故爲反稱方陣而必爲一向量於是此向量者命之曰向量之旋轉(the curl of the vector)用 curl A 爲記號式如下示

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{curl}_x A&=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \operatorname{curl}_y A&=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\\ \operatorname{curl}_z A&=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\end{aligned}\right\} \qquad [13]$$

向量散佈與向量旋轉二式之證明將在後論

§23 交綜關係爲向量之旋轉

易方陣之交綜線迹至爲紛歧 (§11 圖 7) 然宇宙之奧秘在其中欲通其義必察線迹紛歧之所由然夫欲變更方陣形式使易方陣之交綜線迹悉變整齊則殊匪易然苟知其本根則爲之亦匪難余嘗試作之縷述其義如次

六十四卦交綜者五十有六而自綜者八此八者順倒皆一曰乾坤坎離中孚小過大過頤圖14所示爲自綜卦在易方陣之卦位外示之序爲行列之序在方陣算法之例以行易列則值無變兩行互易則其號變於列亦然今試

以第2行與第5行互易以第4行與第7行互易如是者一易爲負再易爲正故方陣之值無變而乾中孚離頤大過坎小過坤均在對角線成對角方陣

若易方陣行之序二與五相對易四與七相對易而列之序無變則列爲乾兌離震巽坎艮坤行爲乾巽離艮兌坎震坤於是對角線上乃爲乾中孚離頤大過坎小過坤如圖15示之

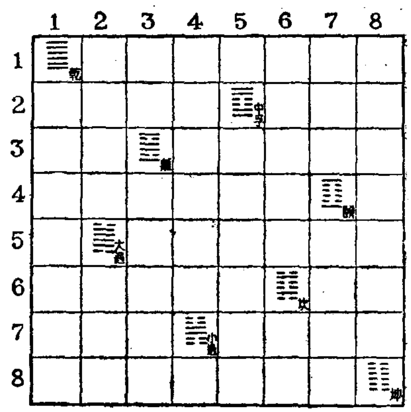


圖 14　自綜卦位

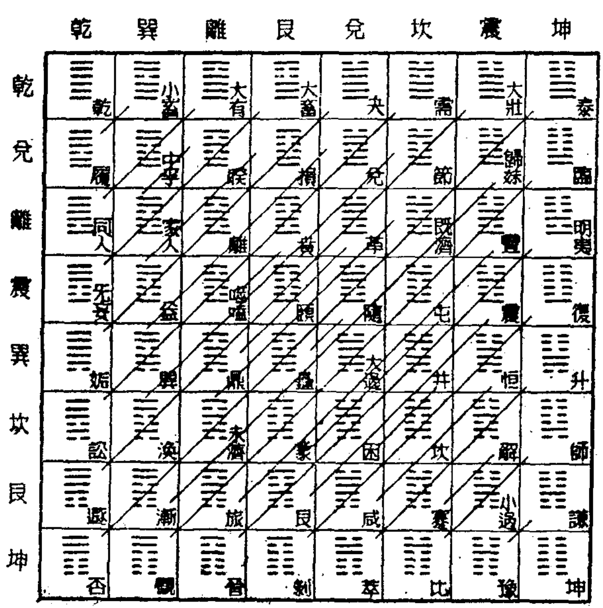


圖 15　易方陣之變方陣

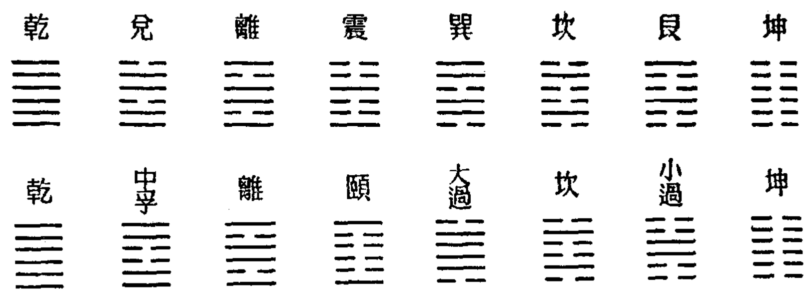
左圖對角線上八卦爲自綜卦順倒無辨除此之外其他五十六卦之聯皆交綜線迹交綜線迹皆垂直於對角線而並行於第二對角線乾坤線者對角線也泰否線者第二對角線也此與易方陣之交綜線迹至紛歧者則有間焉而方陣之值無變

若(5)式之方陣

除對角線外其他兩兩爲對者皆聯之以線則亦並行於第二對角線而其兩兩爲對由〔13〕式則知爲向量之旋轉也故圖 15 之方陣實與(5)式之方陣相爲一致所異者一爲八列八行一爲三列三行而已耳由是觀之所謂兩卦之交綜所代表者亦卽向量之旋轉也

交綜關係既爲向量之旋轉在易方陣乃見其旋轉之形此卽卐卍兩形也(§12圖10)而今方陣(§22(5)式)僅能以直線代表之圖 15 者易方陣之變方陣也雖與易方陣同其值而其方陣性質非易方陣乃同於今方陣

余今說明八重卦爲對角與八自綜卦爲對角之分辨



重卦者內外皆相同也而自綜八卦除乾坤坎離外中孚則內兌外巽頤則內震外艮大過則內巽外兌小過則內艮外震今若使二人相對立甲但看內卦乙但看外卦而所謂內外仍依甲言實則甲之內乙之外也甲之外乙之內也於是中孚則甲曰兌乙亦曰兌蓋乙之兌於甲爲巽頤則甲曰震乙亦曰震蓋乙之震於甲爲艮大過則甲曰巽乙亦曰巽蓋乙之巽於甲爲兌小過則甲曰艮乙亦曰艮蓋乙之艮於甲爲震此相對論之義也於是皆無辨焉

§24 直線與圓

圖15者余以易方陣變作今方陣也由此交綜卦之紛歧線迹悉變爲並行線而皆垂直於對角線此與(5)式之方陣相中也而(5)式之方陣除對角線其他諸元兩兩爲對者由〔13〕式證爲向量之旋轉故今方陣以一直線示向轉之旋轉若易方陣則卐卍兩形示之旋矣

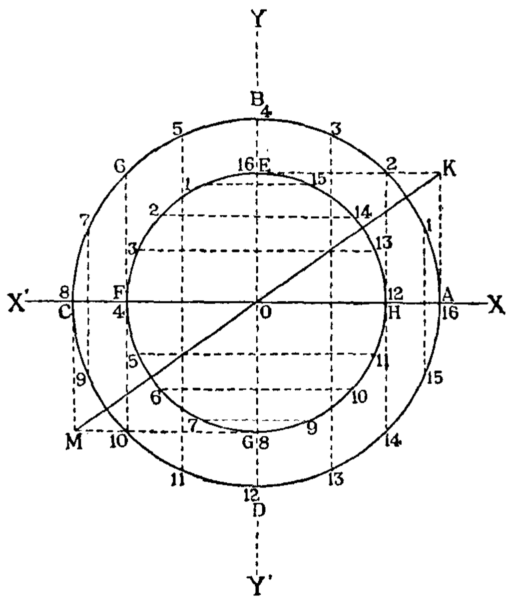


圖 16　二圓運動之合

夫直線之與圓究竟有何區別則將言之今若有二圓運動其一以等速行於 $ABCD$ 周其一以等速行於 $EFGH$ 周如圖 16 所示使其行一周之時二者相等於是 $ABCD$ 圓運動之 X 軸向量爲來復動而於 $EFGH$ 圓運動則 Y 軸向量亦爲來復動二來復動之時間亦相等使每周皆分十六點當此二圓運動在 A 與 E 時二向量之合爲 OK 如圖所示他點如數求之於是此二來復動在 X 軸與 Y 軸者合爲一來復動以 OK 爲振幅其向爲 KOM 與 X 軸所成之角其正切等於 OE/OA 以算式書之如次

$$x=a_1\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right),\qquad y=a_2\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \qquad \cdots\cdots(6)$$

故

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \qquad \cdots\cdots(7)$$

上式 a_1 爲 x 軸上來復動之振幅 a_2 爲 y 軸上來復動之振幅 T 爲週期當 P 點自 x 軸經過 t 時 $POX=\theta$ 則 $\theta=2\pi t/T$ 兩來復動合而爲一之來復動之振幅爲 $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ 而與 x 軸所成之角其正切爲 a_2/a_1

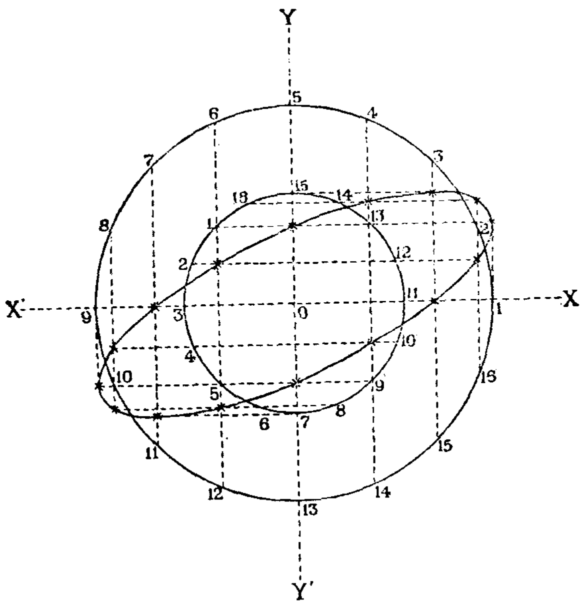


圖17 兩來復動振相差 $\pi/4$ 合成橢圓

今若有二來復動互交直角其振相假定相差 $\frac{\pi}{4}$ 其振幅不同以圖17示之此圖作法與前圖(圖16)同惟內圈與前圖內圈比則相差 $\frac{\pi}{4}$ 故二來復動之相合而爲一前爲直線今成橢圓

今以算法求之如次命 XOX' 軸上來復動之振幅爲 a 而 YOY' 軸上來復動之振幅爲 b 在某時命外圈之動點離 OX 而以連中線與之成 θ 角於是 x 爲並行於 X 軸之向量 $x=a\cos\theta$ 此即 X 軸上來復動之公式若在 Y 軸上之振相比此過 δ 角則內圈動點此時離 OY 而連中線與之成 $\theta+\delta$ 角於是 y 爲並行於 Y 軸之向量 $y=b\cos(\theta+\delta)$ 此即 Y 軸上來復動之公式得算數如次

$$\frac{y}{b}=\cos(\theta+\delta)=\cos\theta\cos\delta-\sin\theta\sin\delta$$

$$=\cos\theta\cos\delta-(1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}\sin\delta$$

$$=\frac{x}{a}\cos\delta-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\delta \quad\cdots\cdots(8)$$

$$\therefore\quad \left(\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\cos\delta\right)^2=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2\delta \quad\cdots\cdots(9)$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta+\frac{x^2}{a^2}\cos^2\delta=\sin^2\delta-\frac{x^2}{a^2}\sin^2\delta \quad (10)$$

$$\frac{x^2}{a^2}(\cos^2\delta+\sin^2\delta)-\frac{2xy}{ab}\cos\delta+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\delta \quad (11)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\delta \quad\cdots\cdots(14)$$

上式爲橢圓之普通公式當 $\delta=0$ 則 $\sin\delta=0$，$\cos\delta=1$ 由上式得下式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0 \quad\cdots\cdots(12)$$

$$\therefore\quad y=\frac{b}{a}x \quad\cdots\cdots(13)$$

此爲直線公式過 0 點而與 X 軸成一角度其正切爲 b/a 若 $\delta=\pi$ 則 $\cos\delta=-1$ 而得下式

$$y=-\frac{b}{a}x \quad\cdots\cdots(14)$$

此爲直線過 0 點而與 X 軸成一角度其正切爲 $-\frac{b}{a}$ 若 $\delta=\frac{\pi}{2}$ 則 $\cos\delta=0$，$\sin^2\delta=1$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\cdots\cdots(15)$$

此爲橢圓公式其長半徑曰 a 在 X 軸其短徑曰 b 在 Y 軸若 $a=b$ 則橢圓爲圓

兩振幅相同之來復動互成直角而振相差別遂成直線橢圓及圓如圖 18 示之

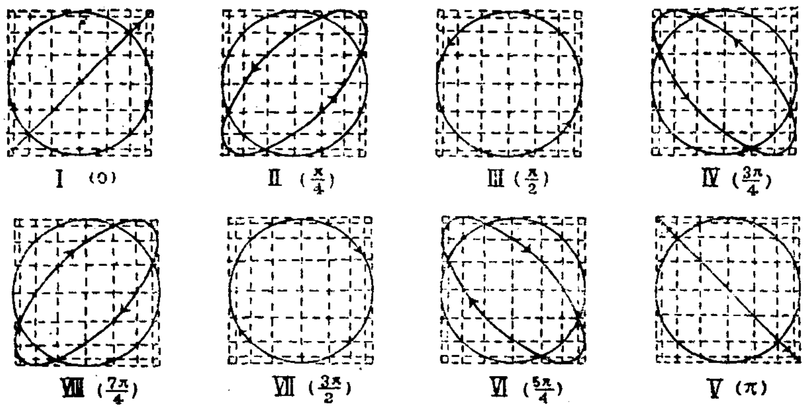


圖 18 直線橢圓與圓

上圖所示兩來復動互成直角其振幅同其週期亦同而振相差 π 或 2π 者爲直線振相之差爲 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ 者爲橢圓振相之差爲 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ 者爲圓

§25 交錯關係爲向量之散佈

反稱方陣者對角線上諸元之值皆爲零圖15之對角線爲自綜之卦八由是皆視之爲零然此八卦仍有其交錯之關係乾之與坤也坎之與離也中孚之與小過也大過之與頤也交錯者此卦之陽彼卦之陰也

圓運動者平視之而爲圓側視之而爲一直線凡垂直於圓平面之中心者與圓平面上任何方向皆垂直圖15之自綜八卦若聯其交錯線迹則皆並

行於對角線而與五十八卦之交綜線迹均爲垂直五十八卦兩兩而爲對則交綜線之聯爲二十有八此二十八線每線皆代表一向量之旋轉旋則爲圜設以此圜之平面以對徑爲軸而旋轉一直角使視線與平面並行則見旋於圜者變爲循一直線而來復動

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2					-i			
3			1					
4							-i	
5		i						
6						-1		
7				i				
8								-1

圖19　自綜卦四象數位

圖14者自綜八卦之卦位也變其行二與五互易四與七互易則爲對角方陣然而方陣之值二者勿異命圖14諸卦之值皆等於 1 又以方陣四分爲四象限而以 $+1, -1, +i, -i$ 分命四向則圖 14 變爲圖 19 而卽自綜八卦之卦位也自綜者不得爲交綜也然而有其交錯焉是故圖19之方陣取其交錯之誼而不以綜論此方陣更爲變化示圖20

左圖甲卽圖19之方陣乙變於甲以其行 1234 與 5678 相對易丙變於乙以

乙

	5	6	7	8	1	2	3	4
1					1			
2	-i							
3							1	
4			-i					
5						i		
6		-1						
7								i
8				-1				

甲

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2					-i			
3			1					
4							-i	
5		i						
6						-1		
7				i				
8								-1

丙

	5	6	7	8	1	2	3	4
5						i		
6		-1						
7								i
8				-1				
1					1			
2	-i							
3							1	
4			-i					

丁

	1	2	3	4	5	6	7	8
5		i						
6						-1		
7				i				
8								-1
1	1							
2					-i			
3			1					
4							-i	

圖 20　自綜卦方陣之四變

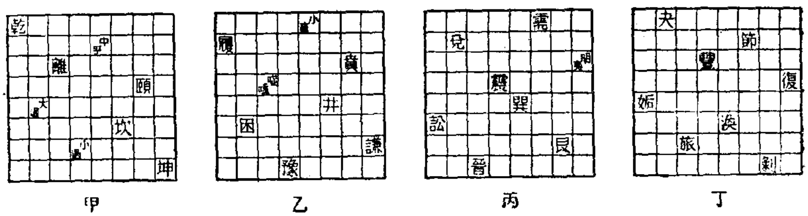


圖 21　自綜卦四變方陣之卦位

其列1234與5678相對易丁變於丙以其行5678與1234相對易甲變於丁以其列5678與1234相對易如是而一周故自綜八卦之方陣一而化爲四自綜八卦既取交錯之誼故其所變亦取交錯以上甲乙丙丁示其卦位如圖21示之

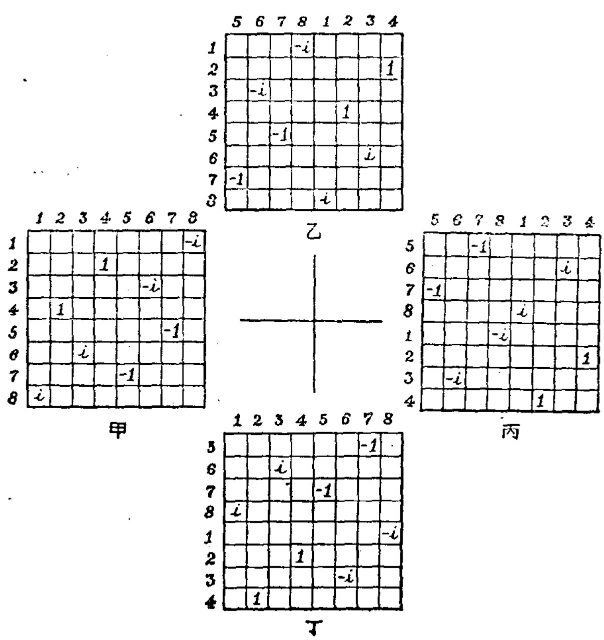


圖 22　錯綜卦方陣之四變

六十四卦有自綜者八亦錯亦綜者八其他四十八卦兩而爲對者錯則非綜綜則非錯泰之與否也既濟之與未濟也隨之與蠱也歸妹之與漸也之八者錯而兼綜矣謂之錯綜卦錯綜卦之方陣卦位爲自綜卦方陣卦位之旋轉一直角也亦

以$+1,-1,+i,-i$,分命四向而如圖 20 所用之法爲之四變示如圖22

錯綜卦者以錯論之不以綜論之是何也蓋易方陣之交綜線迹(§11圖7)二十有八其中四線綜而兼錯此錯綜卦八者之聯也此外二十有四線爲綜而非錯至於自綜之卦八不得交綜惟可以錯論如是則得以錯論者十有六卦自綜之八與錯綜之八也錯綜八卦既取交錯之誼故其所變亦取交錯於是圖 22 之甲乙丙丁示其卦位如下圖

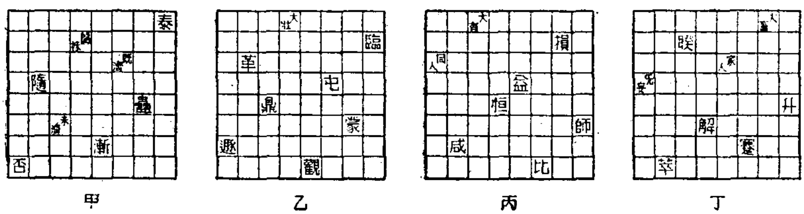


圖 23　錯綜卦四變方陣之卦位

上圖四方陣爲圖21之四方陣之旋轉一直角共八方陣合之則六十四卦咸論交錯斯爲前論交錯線迹 (§10 圖 6) 分爲四重交錯之卦皆在同重聯之以線皆過中心

易方陣者爲球面排列前論之矣而交錯線迹者自一原點而四向散射也自一原點而四向散射者斯謂之散佈者也故曰交錯關係爲向量之散佈而公式作之則如〔12〕式所示(§22)

§26　狄拉克之 q 數

狄拉克謂凡原子之量非可以尋常之坐標系代表之亦非可以示之爲一通常數之涵數(c-number) 蓋必用 q 數 (q-number) 通常算法可得用之於 q 數而惟乘法爲例外蓋 q 數必須爲不可交換之乘法此惟方陣算

法能符合之

方陣乘法爲不可交換之乘法者釋之如次對於 n 級之兩方陣

$$A=(a_{ik}),\ B=(b_{ik})\ \ i,k=1,2\cdots n \quad\cdots\cdots(16)$$

若 $C=AB$ 則 $(c_{ik})=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots a_{in}b_{nk}\cdots\cdots(17)$

故 $C=(c_{ik})=\sum\limits_{p} a_{ip}b_{pk}\cdots\cdots〔15〕$

因此 $AB\neq BA\cdots\cdots〔16〕$

蓋 c_{ik} 乃將 A 之第 i 列之元與 B 之第 k 行之元分別相乘而作之和也

若 $D=BA$ 則 $D=(d_{ik})=\sum\limits_{p} b_{ip}a_{pk}\cdots\cdots(18)$

故 D 與 C 不等值

夫宇宙之組織非如巃确見象之所示而用通常物理學之定律所可釋也蓋有其精密之關鍵在精密之中有精密焉此所以必用精密之算狄拉克之所謂 q 數也

然狄拉克之 q 數方陣算法而已如圖15者固已爲方陣矣而因其爲反稱方陣對角線上諸元之値爲零零則爲無矣而自綜八卦在交綜關係之中已視爲無則又以其交錯關係而命之一於是方陣者一而化爲八合之則六十四卦爲易方陣交錯線迹之聯如是則所謂交錯關係者自無適有而復以方陣表之者也方陣表之爲向量之散佈則自原點而四向散射亦包舉一空間莊周有言曰『自無適有以至於三』所謂三者亦三度空間之謂也與此所謂精密之中有精密也故其算盡得宇宙之奥秘而狄拉克之所謂 q 數也若僅方陣算法爲之用而其方陣非自無適有而化出者則猶未逮雖欲謂之 q 數而仍不足以言宇宙之精宇宙之極吾固以爲 q 數者惟易方陣稱之

第六章

河洛數與易方陣

§27　卦之序數

河圖之數十洛書之數九而八卦者以八為週期也八之週期九為一而十為二夫易之義陽一陰二故陽岦一畫陰岦二畫此皆於宇宙眞理得之乎至精之倪余將漸次述之

易方陣者為 q 數(§26) 前說之矣命 Γ 為易方陣以 q 為之元乃作下式

$$\Gamma=\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} & q_{16} & q_{17} & q_{18} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} & q_{26} & q_{27} & q_{28} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} & q_{36} & q_{37} & q_{38} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} & q_{45} & q_{46} & q_{47} & q_{48} \\ q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & q_{55} & q_{56} & q_{57} & q_{58} \\ q_{61} & q_{62} & q_{63} & q_{64} & q_{65} & q_{66} & q_{67} & q_{68} \\ q_{71} & q_{72} & q_{73} & q_{74} & q_{75} & q_{76} & q_{77} & q_{78} \\ q_{81} & q_{82} & q_{83} & q_{84} & q_{85} & q_{86} & q_{87} & q_{88} \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots[17]$$

由上式命　乾$=1$　兌$=2$　離$=3$　震$=4$

巽＝5　　坎＝6　　艮＝7　　坤＝8

足指數之第一字爲內卦第二字爲外卦如是任取一卦其序可知任舉一元其卦可知如言屯卦則水雷屯內震外坎故其序爲 q_{46} 又如言 q_{67} 則內坎外艮是爲山下出泉蒙如是者卦與其序一望可知而六爻之陰陽爲 q 足指數之導誘數作如下式

$$q_{\mu\nu}=\varphi(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5,\delta_6) \qquad \delta_\sigma=\begin{cases}0\\1\end{cases} \cdots\cdots\cdots (18)$$

$$\mu,\nu=1,2,3,4,5,6,7,8 \qquad \sigma=1,2,3,4,5,6$$

上式命 δ 爲爻其值爲零或一陰者零也陽者一也而 $q_{\mu\nu}$ 爲六爻之涵數由足指數 $\mu\nu$ 之值而定 δ_σ 之爲零或一 $\mu\nu$ 者八卦也 φ 者涵數記號

§28 交錯關係之公式

量子之算法由週期運動而作也命 q 爲坐標 p 爲動能則兩者之公式皆包舉方陣之一切項值其式如次

$$q=\left\{q_{nm}e^{2\pi i\nu_{nm}t}\right\}, \quad p=\left\{p_{nm}e^{2\pi i\nu_{nm}t}\right\} \cdots\cdots\cdots (1)$$

上式 ν_{nm} 爲振數更有下式

$$q_{nm}=\overset{*}{q}_{mn}, \quad p_{nm}=\overset{*}{p}_{mn} \cdots\cdots\cdots (2)$$

上式星點爲交錯量(the conjugate imaginary) 凡方陣其足指數之兩值相對易而成爲交錯量者謂之黑麻脫方陣(Hermite matrices)

易方陣之交錯線迹所聯兩卦亦交錯量也然易方陣之性質不與尋常同故余必另作公式其式下示

$$q_{\mu\nu}=\tilde{q}_{(9-\mu),(9-\nu)} \qquad \mu,\nu=1,2,3,4,5,6,7,8 \cdots\cdots\cdots (19)$$

上式余用波曲線記號爲易方陣之交錯量以別於通常所用星點記號

易方陣爲四重交錯之卦皆在同重而交錯線迹皆過中心凡交錯兩卦其第一足指數兩者相加必等於9其第二足指數兩者相加亦如之故作如〔19〕式舉例如中孚與小過爲交錯卦中孚內兌外巽兌爲 2 巽爲 5 故爲 q_{25} 小過內艮外震艮爲 7 震爲 4 故爲 q_{74} 由是 q_{25} 之第一足指數 2 與 q_{74} 之第一足指數 7 兩者相加等於 9 而 q_{25} 之第二足指數 5 與 q_{74} 之第二足指數 4 兩者相加亦等於 9 凡六十四卦之交錯莫不從此例也故以公式作之

§29　交綜關係之公式

易方陣之交綜線迹紛歧甚矣然變其行之序二與五相對易四與七相對易而列不變則所有交綜線迹皆變並行於第二對角線若變其列之序二與五相對易四與七相對易而行不變則所有交綜線迹亦變爲並行於第二對角線惟卦位視於前者爲有殊耳今余作爲公式以示易方陣之交綜關係而用動量 p 爲元所以舍 q 而用 p 者將俟後論

$$\left.\begin{array}{ll} p_{\mu\nu} = \overline{p}_{\mu^*\nu^*} & \mu,\nu=1,2,3,4,5,6,7,8, \\ & \mu^*,\nu^* = \begin{matrix} 2\times\ \times 5 \\ 4\times\ \times 7 \end{matrix}\ \mu,\nu \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots〔20〕$$

上式用短畫爲交綜關係之記號今物理學以星點記交錯量亦以短畫記之而易方陣之交綜關係固勿異於今物理學所謂交錯量也然易方陣有交錯關係與交綜關係之分辨斯其精密也余則用短畫惟爲交綜之關係而足指數星點前未嘗有余則用之以 $\begin{matrix} 2\times\ \times 5 \\ 4\times\ \times 7 \end{matrix}$ 符號表其義蓋 $\mu,\nu=1,2,3,4,5,6,7,8$

而逢 2 變 5 逢 5 變 2 逢 4 變 7 逢 7 變 4 其 1,3,6,8 則無變乃爲 μ^*,ν^*其符號余不得不創也然易方陣交綜關係之複雜線迹則已用簡單之公式表之矣

今言其例如鼎革爲交綜卦鼎爲內巽外離巽 5 而離 3 故爲 p_{53} 逢 5 變 2 而 3 無變則爲 p_{23} 易其足指數之序則爲 p_{32} 離 3 而兌 2 是內離外兌革卦也又如歸妹與漸交綜卦也漸卦內艮外巽艮 7 而巽 5 故爲 p_{75} 逢 7 變 4 逢 5 變 2 則爲 p_{42} 易其足指數之序則爲 p_{24} 兌 2 而震 4 是內兌外震歸妹卦也又如中孚與小過皆自綜卦也中孚內兌外巽故爲 p_{25} 逢 2 變 5 逢 5 變 2 則爲 p_{52} 易其足指數之序仍爲 p_{25} 故中孚爲自綜卦也小過內艮外震故爲 p_{74}逢 7 變 4 逢 4 變 7 則爲 p_{47} 易其足指數序而爲 p_{74}2 是仍小過也而小過亦自綜卦斯皆方程式〔20〕之用也凡六十四卦交綜關係皆符於斯式

§30 河洛之較

上述算式據洛書之數也故用九若據河圖則用十河圖者五與十居中央居中央者謂之零是以五爲週期五之爲週期也六故爲一七爲二八爲三而九爲四遜於五者四爲負一三爲負二二爲負三而一爲負四在易方陣則乾命 q_{11} 而坤命 q_{99} 去中五也於是命卦如次

乾＝1　兌＝2　離＝3　震＝4

巽＝6　坎＝7　艮＝8　坤＝9

交錯關係之公式作如下式

$$q_{\mu\nu} = \tilde{q}_{(10-\mu),(10-\nu)} \quad \mu,\nu = 1,2,3,4,6,7,8,9 \quad \cdots\cdots〔19〕_a$$

凡交錯兩卦其第一足指數兩者相加必等於10其第二足指數兩者相加亦如之

交綜關係之式在河圖之用亦殊於洛書故作如下圖

$$\left.\begin{array}{l} p_{\mu\nu} = \bar{p}_{\mu^*\nu^*} \quad \mu,\nu = 1,2,3,4,6,7,8,9 \\ \qquad\qquad \mu^*,\nu^* = \dfrac{2\times\ \times 6}{4\times\ \times 8}\,\mu,\nu \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots〔20〕_a$$

蓋 $\mu\nu$ 之值逢 2 變 6 逢 6 變 2 逢 4 變 8 逢 8 變 4 其 1,3,7,9 則無變遂爲 $\mu^*\nu^*$ 焉

河圖爲量子洛書爲電子而電子爲半量子量子爲光線之散佈在第四度電子爲電力線之散佈在第五度由易之義三五相等故電子與空間符合空間爲陽而超空間者爲陰由易之義陽一陰二故電子爲半量子凡量子成於交錯量是爲＋1，－1 之變謂之差二之數而電子爲 o，1之變謂之差一之數河圖之數差二也八之爲週期也十爲之二洛書之數差一也八之爲週期也九爲之一易方陣者河洛之數眩而存焉凡此種種必達於超相對論而後說明茲姑闕如而待後證

第 七 章

太極圖與易方陣

§31 波羅吉利振相速度之算

前證易方陣爲球面排列而交錯線迹爲兩半徑之在一直線球半徑者垂直於場衡面而即數量場之階度而易方陣有球面四重則皆場衡面也波羅吉利創物質波論(Broglie 1925) 其振相速度之算更能符合於易方陣

依物質波論物無非波而有波速波速與機速兩者之乘等於光速之平方其式示如下

$$uv=c^2 \quad \text{〔21〕}$$

上式 u 爲波速 v 爲機速 c 爲光速此三種速度外波羅吉利復說有振相速度其算如次

若有一空間區域其性質對時間爲獨立在其中有一波行見象以涵數 $\psi(x,y,z,t)$ 表之而適合於下示之基本公式

$$\Delta\psi=\frac{1}{u^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (1)$$

上式 u 爲波速隨處而變而不繫於時間而 u 可以爲虛數 ($u^2<0$) 光速以波速除之之商 n 通常稱之曰反射指數而視 u 或 n 爲坐標系之涵數亦無所殊

由於實驗事跡之解釋物理學者遂致力於下示之式以爲(1)式之解

$$\psi(x,y,z,t)=A(x,y,z)\cos 2\pi\nu[t-\Psi(x,y,z)] \quad \text{(2)}$$

上式 ν 爲常數謂之波振數 A 爲一涵數代表每一點之波振幅而餘絃下之值謂之波振相(phase)此解答可作爲下式之實數部分

$$\psi(x,y,z,t)=C\ e^{2\pi i\nu t}\ e^{2\pi i\varphi} \quad \text{(3)}$$

上式 C 爲常數亦爲實數 φ 爲 x,y,z 之涵數通常爲虛數若 $\varphi=a+ib$ 則見有下式

$$\Psi=-\frac{a}{\nu}, \qquad A=C\ e^{-2\pi b} \quad \text{(4)}$$

由(2)式之解而波公式有其簡單形式於此時間之值不繫焉

$$\Delta\psi+\frac{4\pi^2\nu^2}{u^2}\psi=\Delta\psi+\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}n^2\psi=0 \quad \text{(5)}$$

在一定時間蜿蜒波之振相在下式所示之面有常值焉

$$\Psi(x,y,z)=C' \quad \text{(6)}$$

上式之 C' 爲常數此爲同振相之面若時間變動振相之值在空間進行自一面至次面凡曲線之直交於面 $(\Psi=C')$ 者由定義稱之曰波射線 (the rays of the wave) 而今稱之曰振相速度 (phase velocity) 者此速度必須在任何點皆沿射線而行以符合於振相之準值也

若 ∂r 爲射線之一小段之長則振相速度以下式求之

$$U=\frac{1}{\partial\Psi/\partial r}=\left[\Sigma\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{[22]}$$

今有一重要之問題卽 u 與 U 之兩種速度亦有其簡單之關係乎欲解此題以(3)式之解代入(5)式乃得下式

$$-4\pi^2\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2\pi i\Delta\varphi+\frac{4\pi^2\nu^2}{u^2}=0 \quad\text{.........(7)}$$

若φ之第二微分係數比第一微分 係數平方之和為甚小則涵數$\varphi(x,y,z)$略如下示

$$\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}\quad\text{.........(8)}$$

由定義置 $$\frac{u}{\nu}=\lambda\quad\text{.........(9)}$$

若u為實數φ亦實數則由(8),(4),〔22〕諸式乃得下式

$$\Psi=-\frac{\varphi}{\nu},\quad \Sigma\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{U^2}=\frac{1}{u^2}\quad\text{.........〔23〕}$$

故U與u兩速度相等而得下解

$$\psi(x,y,z,t)=C\cos 2\pi\nu\left[t-\int\frac{dr}{u}\right]\quad\text{.........〔24〕}$$

上式積分取諸沿射線之經過M點者而M點之坐標系為(x,y,z)自一同振相之面以為原點而至M

易方陣為四重同心圓面之球(§16)此所謂同振相之面也(the surfaces of equal phase) 六十四卦皆在第四重之球面故交錯線迹示為向量之散佈而即此之謂波射線也振相速度者沿此射線而進行也於是乎〔24〕式之解殆將視為易方陣之解

§32 勢之學理

若有一數量與一定點O之距離為反比例於此數量場中任擇一點P謂之場點(field-point) 而O謂之原點 (source) 則數量與距離倒數之

此可視爲原點之量 (the strength of the source) 與一宇宙常數之乘此宇宙常數之值繫其所用測量之單位系統而殊置此常數爲一命數量爲 ψ 原點之量爲 g 而書下式

$$\psi=\frac{g}{r}\quad\cdots\cdots(10)$$

命場點之坐標爲 x_a,y_a,z_a 原點之坐標爲 x_q,y_q,z_q 而繫於一定之坐標系於是原點視以爲定而場點視以爲變或者場點視以爲定而原點視以爲變皆可乃有下式

$$\text{grad}_a\,\psi=i\frac{\partial\psi}{\partial x_a}+j\frac{\partial\psi}{\partial y_a}+k\frac{\partial\psi}{\partial z_a}\quad\cdots\cdots(11)$$

上式謂之變值場點之階度(the gradient for a variable field-point) 而 i,j,k 爲坐標系之基本向量更有下式

$$\text{grad}_q\,\psi=i\frac{\partial\psi}{\partial x_q}+j\frac{\partial\psi}{\partial y_q}+k\frac{\partial\psi}{\partial z_q}\quad\cdots\cdots(12)$$

上式謂之變值原點之階度 (the gradient for a variable source) 由§19〔11〕式若原點爲定則得下式

$$\text{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\quad\cdots\cdots(13)$$

上式 r 爲原點與場點相聯之向之直線苟視 O 爲場點 P 爲原點而式如次

$$\text{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}'}{r}\quad\cdots\cdots(14)$$

而 $\mathbf{r}'$ 與 $\mathbf{r}$ 方向相反其值相等遂爲下式

$$\mathrm{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)=-\mathrm{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔25〕$$

變值場點之階度爲負值則命之曰場量(the strength of field) 而場量之於數量遂謂之有勢(potential)命 F 爲場量乃有下式

$$F=-\mathrm{grad}_a\,\psi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔26〕$$

由(10)(13)兩式得下式

$$F=\frac{g}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

場量之川流(the flux of the field-strength)通過任何面之部分有簡單之關係如下式

$$F_n df=\frac{g}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}n\,df\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

上式 df 爲面積部分 n 爲單位向量垂直於面而外向者 F_n 爲向量 F 與單位向量 n 之數量乘(scalar product)而等於 nF

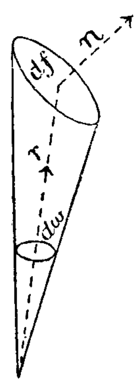


圖24 割諸單位球之立體角

單位向量 n 與單位向量 $\frac{\mathbf{r}}{r}$ 之數量乘不過 $\mathbf{r}$ 與 n 所成角度之餘弦耳乃有下式

$$F_n df=g\frac{df\cos(\mathbf{r},n)}{r^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

作一球面包舉力原其半徑爲單位長度謂之曰單位球(unit-sphere) 則(17)式所示爲割諸單位球之一面積由一圓錐(cone) 使其顚 (vertex) 爲力原其底 (base) 爲面積部分 df 命 $d\omega$ 爲割諸單位球之面

積則 $d\omega$ 爲立體角(solid angle) 張於 df 而自諸原見圖24於是有下式

$$\frac{df}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}n=d\omega \quad\text{(18)}$$

上式 $d\omega$ 之爲正或負視 r 與 n 兩向量所成角度之爲銳或鈍而定之

由(13)式與〔25〕式乃得下式

$$-n\ \mathrm{grad}_a\left(\frac{1}{r}\right)\ df=n\ \mathrm{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)df=d\omega \quad\text{(19)}$$

由(16)式與(18)式得下式

$$F_n df=g\ d\omega \quad\text{(20)}$$

一任意之面積包舉力原積分立體角之由此面積者乃等於單位球之全面積此卽 4π 是故有下式

$$\int F_n df=4\pi g \quad\text{〔27〕}$$

是故場量之川流經過一面積而包舉力原者等於力原之量乘 4π

若有面積而非包舉力原者其算如次(見圖25)另作圓錐頂在力原其底割諸面積之包舉力原者於是 r 與 n 所成角度在近力原之面 (df_1) 者爲鈍在遠力原之面 (df_2) 者爲銳故有下式

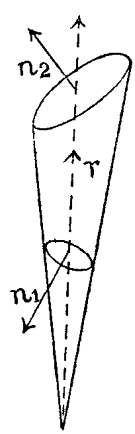


圖25 n與r所成之鈍角與銳角

$$\frac{df_1}{r_1^2}\cos(n_1,\mathbf{r})+\frac{df_2}{r_2^2}\cos(n_2,\mathbf{r})=-d\omega+d\omega=0 \quad\text{(21)}$$

是故場量川流出於力原而經過一閉合之面但非包舉力原者其値爲無

若場量之向量場(the vector field)以向量線(vector lines)代表之而其密度 (dencity) 在任何處皆比例於每單位面積之向量川流則

每力原所出之向量線皆 4π 倍其力原之量此力原 (source) 與力原之量 (strength of source)之說明也若力原之量爲負值則必 $4\pi g$ 之向量線終止於力原

若有 n 場交互作用每場皆出於各別之力原則在任一場點之勢有下值

$$\psi=\sum_{h=1}^{h=n}\frac{g_h}{r_h} \quad\cdots\cdots(22)$$

而在任何閉合之面有下式

$$\int F_n df=4\pi\,\Sigma'\,g_h \quad\cdots\cdots[27]_a$$

上式積加記號加撇者示所積加惟限於力原之在閉合之面之中者也

§33 電子之理論

依電子論物質內之電磁關係不過爲一空間有電其中他無所有之方程式故所算不過電密(單位容積之電量)電力場量磁力場量之類至於磁力但視爲電之流動所生非特有之量用希維雪特之說(Heaviside) 兩電量爲 e_1e_2 相距 r 靜止時其間之力如下式

$$f=\frac{e_1e_2}{4\pi r^2} \quad\cdots\cdots(23)$$

故 e 電量在靜止時之場量爲 $e/4\pi r^2$ 而電力線之起於正電量或止於負電量者爲下數

$$4\pi r^2\times\frac{e}{4\pi r^2}=e \quad\cdots\cdots(24)$$

故電力線之起於單位容積者等於電密而示如下式

$$\operatorname{div} F = \varrho \cdots\cdots〔28〕$$

上式 F 爲電力場量 ϱ 爲電密兩磁極之力如下式

$$f = \frac{m_1 m_2}{4\pi r^2} \cdots\cdots(25)$$

故一磁極 m 之場量爲 $m/4\pi r^2$ 既不作有獨存之磁量故所有磁力線皆閉合之圈而磁力線之數止於一單位容積者爲零故有下式

$$\operatorname{div} H = 0 \cdots\cdots〔29〕$$

上式 H 爲磁力場量

電流密度者單位面積在垂直之向所過之電流也在電子與正電核間一點之電流密度等於 $\partial F/\partial t$ 電子之中或正電核中之一點若其處電密爲 ϱ 當電量行動時有對流密度 ϱv 而 v 爲電之速度於是任何點之電流密度爲兩向量之和 $\frac{\partial F}{\partial t} \times \varrho v$ 而場量 F 與電密 ϱ 皆爲希維雪特之靜電單位故電流密度亦爲希維雪特靜電單位卽每一秒時經過一平方生的密達面積者

磁場之發生於電流一單位磁極繞行電流一周所須之功爲 4π 乘電流而場量與電流爲尋常電磁單位命 i 爲電流密度則有下式

$$\operatorname{curl} H = 4\pi i \cdots\cdots〔30〕$$

若 i 爲希維雪特之靜電單位 H 而爲希維雪特之電磁單位則爲下式

$$\operatorname{curl} H = \frac{i}{c} \cdots\cdots(26)$$

於是

$$\operatorname{curl} H = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \varrho v\right) \cdots\cdots〔31〕$$

若一電量繞行一周則磁量之變率爲下式

$$\operatorname{curl} F = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} \quad\text{……………〔32〕}$$

於是電子論之基本方程式在於電磁之關係者如下式

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div} H = 0 \\ &\operatorname{curl} H = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \varrho v\right) \\ &\operatorname{div} F = \varrho \\ &\operatorname{curl} F = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad\text{……………〔33〕}$$

電速 v 及場量 F,H 係觀察者所處地位而定通常視地球爲靜止蓋地球運行對於電磁不生影響

§34 易方陣之電子之方程式

易方陣用河圖之數則爲量子用洛書之數則爲電子河圖以五爲中是爲中心坐標而交錯線迹一中同長故交錯兩卦一爲 $+1$ 一爲 -1 洛書以零爲中是爲在周坐標而交錯兩卦一爲 0 一爲 1 故河圖者 $+1$ 與 -1 之差也是爲差二之數洛書者 0 與 1 之差也是爲差一之數八之週期九爲一而十爲二故河圖用十而洛書用九

量子者共名也量子在第四度則爲光波而量子在三度空間則爲電子故量子與電子其辨固有間其本實爲一通常言之量子與光波同論亦曰光量子

易方陣爲球面排列而交錯線迹四向散佈若視爲電力場量之散佈則〔28〕式爲易方陣之電子方程式惟此爲希維雪特之算之電密

$$\text{div } F=\varrho \cdots\cdots\cdots [34]$$

若尋常之算作如下式

$$\text{div } F=4\pi\varrho \cdots\cdots\cdots [34]_a$$

§35 狄拉克電子用極坐標之算

電子爲在周坐標故其佈算宜用極坐標狄拉克則旣爲之述其算如次設有一題其中能力爲下示之式

$$H=\frac{1}{2m}(P_x{}^2+P_y{}^2)+F(\sqrt{x^2+y^2}) \cdots\cdots\cdots (27)$$

上式用於一電子行動於一中央勢力之場若氫原子者其最適當之例也而狄拉克變之爲極坐標以下式作之

$$\left.\begin{aligned} & x=r\cos\Theta \quad y=r\sin\Theta \\ & P_r=\tfrac{1}{2}(P_x\cos\Theta+\cos\Theta\, P_x)+\tfrac{1}{2}(P_y\sin\Theta+\sin\Theta\, P_y) \\ & P_\Theta=xP_y-yP_x \end{aligned}\right\} \cdots (28)$$

若 x 與 y 爲獨立變數則 P_r 與 P_Θ 爲動量而與 r 及 Θ 爲交錯量由是(27)式爲下式

$$H=\frac{1}{2m}\left(P_r{}^2+\frac{(P_\Theta+\frac{1}{4\pi}h)(P_\Theta-\frac{1}{4\pi}h)}{r^2}\right)+F_{(r)} \cdots\cdots (29)$$

由是得運動公式如次

$$\left.\begin{aligned} \dot{r} &=[r, H]=\frac{1}{m}P_r \\ \dot{P}_\Theta &=[P_\Theta, H]=0 \\ \dot{\Theta} &=[\Theta, H]=\frac{P_\Theta}{mr^2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots [35]$$

上式 $P_r=m\dot{r}$ 而 $mr^2\dot{\Theta}=P_\Theta$ =常數如通常所知而狄拉克用哈生保之公式如次

$$pq-qp=\frac{h}{2\pi i}1 \text{ ……〔36〕}$$

又用普生括號(Poisson Blacket)書之如下

$$[x,y]=\frac{2\pi i}{h}(yx-xy) \text{ ……〔37〕}$$

而〔36〕式書爲下式　$[q,p]=1$ ……(30)

狄拉克求 r 之解用下式

$$r^{-1}=a_0+a_1e^{i}\Theta+a_2e^{-i}\Theta \text{ ……(31)}$$

由是　$$\frac{2\pi i}{h}(P_\Theta e^{ia}\Theta-e^{ia}\Theta P_\Theta)=[e^{ia}\Theta,P_\Theta]=i\alpha e^{ia}\Theta \text{ ……(32)}$$

故　$$e^{ia}\Theta P_\Theta=(P_\Theta-\alpha\frac{h}{2\pi})\ e^{ia}\Theta \text{ ……(33)}$$

$$e^{ia}\Theta f\ (\Theta,P_\Theta)=f(\Theta,\ P_\Theta-\alpha\frac{h}{2\pi})e^{ia}\Theta \text{ ……(34)}$$

此式證之如下說若此式對於 f_1 與 f_2 兩涵數爲準確則對於 $f_1\cdot f_2$ 與 f_1+f_2 亦復爲準確此關係適用於 f_1 等於 Θ 而 f_2 等於 P_Θ 故適於任何 $\Theta^n\ P^m_\Theta$ 之乘積又適於 Θ 與 P_Θ 自乘之涵數

由(28)式及(31)式 x 者與 y 者可展開而爲 $e^{ia}\Theta$ 而 α 爲整數於是振數可求如次式

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{ia}\Theta=2\pi i\ \nu_a\ e^{ia}\Theta \text{ ……(35)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ e^{ia}\Theta=[e^{ia}\Theta,\ H]=\frac{2\pi i}{h}\{H(P_\Theta)e^{ia}\Theta-e^{ia}\Theta H(P_\Theta)\}$$

$$=\frac{2\pi i}{h}\{H(P_\theta)-H\left(P_\theta-\alpha\frac{h}{2\pi}\right)\}e^{i\alpha\Theta} \quad \cdots\cdots(36)$$

比較上式得下式

$$h\nu_a=H(P_\theta)-H\left(P_\theta-\alpha\frac{h}{2\pi}\right) \quad \cdots\cdots(37)$$

狄拉克以為 P_θ 可以一系常數其形式則為 $(n+\beta)\frac{h}{2\pi}$ 者代表之而得一系之振數如下式

$$h\nu_{n,n-a}=H\left((n+\beta)\frac{h}{2\pi}\right)-H\left((n+\beta-\alpha)\frac{h}{2\pi}\right) \quad \cdots\cdots[38]$$

上式施以算術則氫原子之博漠系(Balmer's series)可得

§36　易方陣與太極圖

若用中心坐標則易方陣之交錯兩卦為+1 與−1 此以+1 為陽 −1 為陰也若用在周坐標則易方陣之交錯兩卦其一為 0 其一為 1 此以 1 為陽 0 為陰也太極圖者半陰而半陽也此代表六十四卦之交錯關係兩而為對也

太極圖既分黑白以示陰陽而黑中有白白中有黑則又何說(見圖26)曰此震巽兩卦也河圖以中五為零而震為四巽為六夫以五為零者五之週期也五之週期六為 +1 而四為 −1 是分陰陽若用於電子則坐標在周於是震為 0 則巽為 1 而巽為 0 則震為 1 其在黑中則白者謂之 0 其在白中則黑者謂之 0 巽為白中之黑當其為 0 也震為黑中之白亦當其為 0 也震與巽遞相為 0 因其交錯卦也然六十四卦罔非交錯而球面排列故其 0,1 之變無異於震巽是故太極圖黑中之白與白中之黑不僅屬於震巽而六十

四卦遞相屬焉余今以震巽說者便於解而已也

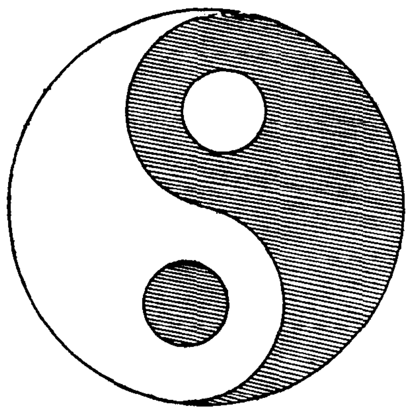


圖 26 太 極 圖

夫所謂 0,1 之變者將有待於陽一陰二之義之說明然而太極圖中亦幾見之矣姑仍以震巽爲說震爲黑中之白點以黑爲有則白爲無是故震爲 0 方斯時也巽爲白中之黑點故對於震言巽爲 1 以黑爲有也反之以白爲有則黑爲無故巽爲白中之零以其爲黑點也方斯時也震爲黑中之白點故對於巽言震亦爲 1 以白爲有也是故震巽爲 0,1 之變而六十四卦悉與震巽同以其爲球面排列也夫球面排列而遞變爲 0 故坐標在周夫以中心爲零則在周爲 1 今坐標在周則 0 在周而中心爲 1 交錯兩卦並在球面而交錯線迹通過中心故兩卦之中有一爲 0 則與之爲交錯者必爲 1 以其與中心在一直線故中心爲 1 則亦爲 1 矣夫陰陽者相對之義故黑白爲陰陽者亦可相反若固視之黑爲陰白爲陽殊非通論由上之說太極圖黑白半分者交錯之義也而黑中白點與白中黑點則 0,1 之變之義也

§37 太極圖之方程式

太極圖爲易方陣而易方陣爲 q 數 q 數以交錯線迹代表之易方陣爲球面排列則交錯線迹自中心四向散射是故以下式作之

$$q=\left\{q_{\mu\nu}e^{2\pi i\nu_{\mu\nu}t}\right\} \qquad \mu,\nu=1,2,3,4,5,6,7,8 \cdots\cdots\cdots\cdots (38)$$

惟電子則坐標在周夫以中心爲靜在周爲動動則有速度是爲下式

$$\dot{q}=\frac{\partial q}{\partial t}=\left\{2\pi i\nu_{\mu\nu}\, q_{\mu\nu}\, e^{2\pi i\nu_{\mu\nu}t}\right\}\cdots\cdots(39)$$

由量子力學基本方程式

$$H_n-H_m=h\nu_{nm}\cdots\cdots[39]$$

及哈生保方程式(§35〔36〕式)則(39)式爲下式

$$\dot{q}=\frac{2\pi i}{h}\left\{(H_n q_{nm}-q_{nm}H_m)\ e^{2\pi i\nu_{nm}t}\right\}\cdots\cdots(40)$$

上式 $H_n=h\nu_n$, $H_m=h\nu_m$

由狄拉克所用普生括號(§35〔37〕式)則(40)式爲下式

$$\dot{q}=[q,H]\cdots\cdots[40]$$

上式爲太極圖之代表方程式太極圖可適用於種種而可以種種方程式適應然而上式所示最爲基本矣狄拉克電子極坐標之算所用運動公式(§35〔35〕式) 爲之基本者其實卽太極圖之公式如〔40〕式之所示也此式之在物理學固所有矣而以之爲太極圖之代表余則始之由是益見其爲重要焉

§38　菠綸與衛納之算

太極圖之方程式菠綸(Born)與衛納(Wiener)之算亦符合之兩向量之線性變換以下式作之

$$y_m=\sum_n a_{mn}x_n\cdots\cdots(41)$$

菠綸衛納由此作式

$$y_m=\sum_n q_{mn}x_n\cdots\cdots(42)$$

上式 x_n 者代表振幅其振數爲 $\frac{1}{h}W_n$ 全系乃爲一運動故有下式

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \sum_n x_n e^{\frac{2\pi i}{h}W_n t} \\ y(t) &= \sum_m y_m e^{\frac{2\pi i}{h}W_m t} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

凡方陣所代表之原子系統始動 $x(t)$ 與終動 $y(t)$ 之間有其關係而可以作式如次

$$q(t,s) = \sum_{m,n} q_{mn} e^{\frac{2\pi i}{h}(W_m t - W_n s)} \cdots\cdots\cdots\cdots (44)$$

自 x 至 y 之過程以下式作之

$$y(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} q(t,s)\,x(s)\,ds \cdots\cdots\cdots\cdots (45)$$

由於方陣 $\{q_{mn}\}$ 之義與 W_m 之值之體系則可作一涵數 $q(t,s)$ 因之而得積分關係如前式(45)示之

故涵數運算子 q (the functional operator) 可施之於涵數 $x(t)$ 而書其變換方式如次

$$y(t) = qx(t) \cdots\cdots\cdots\cdots (46)$$

於是舍方陣而用運算子此可以爲積分式者而涵數 $q(t,s)$ 則全爲任意取之此種運算子代表自一涵數 x 至別一涵數 y 之過程略如上式(46)所示而此種運算子惟限於線性者故如下式

$$q(x_1 + x_2) = qx_1 + qx_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (47)$$

一涵數運算子之義殊爲廣泛任何尋常涵數與量皆可作爲運算子而

(46)式者遂變爲普通乘法所謂單位運算子 1 者使涵數$x(t)$無變也若微分積分運算子$\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial t}$，$\int\cdots\cdots dt$則常用也乘積 pq 者兩種變換之遞相爲用也而不能使 pq 之值與 qp 相等於是不可交換之乘法乃自然焉

菠綸研究運算子$D=\frac{\partial}{\partial t}$之用而知其與積分式(45)所示之運算子 q 爲不可交換

$$Dqx(t)=\frac{d}{dt}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}q(t,s)\,x(s)\,ds$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\frac{\partial q(t,s)}{\partial t}x(s)\,ds \cdots\cdots\cdots(48)$$

$$qDx(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}q(t,s)\frac{\partial x}{\partial s}ds$$

$$=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\frac{\partial q(t,s)}{\partial s}x(s)\,ds \cdots\cdots\cdots(49)$$

後式得之於部分積分而遺其$\frac{1}{2T}\left[q\ (t,s)\ x(s)\right]_{-T}^{+T}$而 Dq 與 qD 兩種變換遂爲積分式者(45)

今試取一方陣 $\{q_{mn}\}$ 所引出之變換涵數若(44)式所示者則亦可以上兩式之變換作之而成涵數其式示如下

$$(Dq)(t,s)=\sum_{m,n}\frac{2\pi i}{h}W_m q_{mn}\,e^{\frac{2\pi i}{h}(W_m t-W_n s)} \cdots\cdots\cdots(50)$$

$$(qD)(t,s)=\sum_{m,n}\frac{2\pi i}{h}W_n\,q_{mn}\,e^{\frac{2\pi i}{h}(W_m t-W_n s)} \cdots\cdots\cdots(51)$$

運算子D相當於方陣$\left\{\frac{2\pi i}{h}W_n\right\}$而$Dq-qD$之變換符於下示之方陣

$$\dot{q}=\frac{2\pi i}{h}(Wq-qW) \quad \text{(52)}$$

由此則作運算子如(44)(45)兩式所示更書之為下式以作為基本定義

$$\dot{q}=Dq-qD \quad \text{〔41〕}$$

於是運算子D乃為下式

$$D=\frac{2\pi i}{h}H \quad \text{〔41〕}_a$$

若運算子D之變換用之於一調和涵數(a harmonic function)$e^{i\omega t}$則有下式

$$D^n e^{i\omega t}=(i\omega)^n e^{i\omega t} \text{ 而 } D=i\omega \quad \text{(53)}$$

此關係必n為整數猶之方陣涵數之義亦可謂之有一運算子之涵數$F(q)$而以$F(D)$為之記號

對於任何問題菠綸衞納已得下式之解

$$q=u(t)F(D) \quad \text{(54)}$$

而示黑麻脫(Hermite)之情形可如下書

$$u(t)F(D)=F^*(D)u^*(-t) \quad \text{(55)}$$

上式星點示為交錯量也於運算子之型苟得其解則坐標之值成為下式

$$q(t,W_n)=e^{-\frac{2\pi i}{h}W_n t}\,q\,e^{\frac{2\pi i}{h}W_n t} \quad \text{(56)}$$

此運算相當於取得一方陣q之一行諸元之和而示在W_n能力狀態之一原子之坐標q之展開

菠綸衞納昭示其術之廣泛並可施之於非週期之問題若等速運動之類而爲方陣之所不能爲之者

菠綸衞納所得之公式〔41〕乃卽太極圖之〔40〕公式是已故改爲下書之序

$$\dot{q}=Dq-qD \cdots\cdots〔40〕_a$$

由是原子體系之公式可使與方陣算法所得同型而〔40〕$_a$ 式之變化有如下示

$$[q_i q_k]=0,\ [p_i p_k]=0,\ [q_i p_k]=\delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases} \cdots\cdots〔40〕_b$$

更有下式

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}&=[q_k,H]=\frac{\partial H}{\partial p_k}\\ \dot{p}&=[p_k,H]=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots〔40〕_c$$

上式爲哈密爾登(Hamilton)公式

第八章

易方陣引出向量理論諸方程式

§39 引出拉普拉斯導誘係數

易方陣交錯線迹爲數量場之階度前已說之(§19)而數量場之階度自成一向量凡數量場之階度之散佈謂之數量之拉普拉斯導誘 Laplace derivative)以 ΔS 爲記號其值拉普拉斯始得之而於波動力學之算有甚重要

由 §22〔12〕式得下式

$$\text{div grad } S=\frac{\partial}{\partial x}(\text{grad}_x S)+\frac{\partial}{\partial y}(\text{grad}_y S)+\frac{\partial}{\partial z}(\text{grad}_z S) \qquad (1)$$

由§19(5)式得下式

$$\text{div grad } S=\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \qquad (2)$$

此卽拉普拉斯導誘係數書如下式

$$\Delta S=\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \qquad [42]$$

於是有下式

$$\text{div grad } S=\Delta S \qquad [43]$$

是故拉普拉斯導誘係數爲階度之散佈

§40　引出哥斯定理

易方陣六十四卦爲球面排列交錯線迹一中同長則自中心四向散佈此自引出哥斯之定理(Gauss's Theorem)

在向量場中取一面積之部分 df 在其處向量之值爲 A 而 A_n 爲其分向之垂直於 df 面而外向者於是乘積 $A_n df$ 謂之經由面積部分之向量川流(the flux of the vector through the surface-element) 在一閉合之面而積分此向量之垂直分向謂之經由閉合之面之總向量川流(the total vector-flux through the closed surface)於是 A_n 可視爲向量 A 與單位向量 n 垂直而外向者之數量乘(the scalar product)此單位向量之分向爲 $\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$, $\cos(n,z)$ 故總向量川流爲下式

$$\int A_n df=\int A_x\cos(n,x)\,df+\int A_y\cos(n,y)\,df+\int A_z\cos(n,z)\,df \quad \cdots\cdots(3)$$

爲向量川流之算作一坐標系空間之包舉於面積者析之爲條並行於 xy 面又復析之並行於 xz 面命 n_1, n_2 爲單

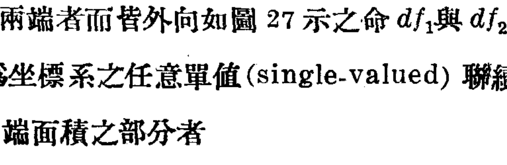


圖 27　空間條析

位向量垂直於面之包舉條之兩端者而皆外向如圖 27 示之命 df_1 與 df_2 爲條之兩端面積命 S_1, S_2 爲坐標系之任意單值(single-valued) 聯續(continuous)涵數在條之兩端面積之部分者

積分算之爲 $\int S\cos(n,x)\,df$

此積分得之自每條之值 $S_1 df_1 \cos(n_1,x) + S_2 df_2 \cos(n_2,x)$ 而將所有條之值積加之

但
$$df_1 \cos(n_1,x) = -dydz$$
$$df_2 \cos(n_2,x) = +dydz$$

此視 n_1 與 x 軸成爲鈍角而 n_2 與 x 軸成爲銳角故其號有正負

由條型而積分全部閉合之面等於 $(S_2-S_1)\,dydz$ 而

$$S_2 - S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial S}{\partial x} dx \quad \cdots\cdots (4)$$

上式 x_1 與 x_2 爲條端兩面之 x 軸故積分全部閉合之面爲下式

$$\int S\cos(n,x)\,df = \iiint \frac{\partial S}{\partial x}\,dxdydz = \int \frac{\partial S}{\partial x} d\tau \quad \cdots\cdots (5)$$

上式 $d\tau$ 爲容積部分此式適於坐標系之任意單值聯續涵數因 $A_x.A_y,A_z$ 爲此種涵數故由 (3) 式與 (5) 式得下式

$$\int A_n df = \int \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) d\tau \quad \cdots\cdots (6)$$

而卽
$$\int A_n df = \int \mathrm{div}\ A\ d\tau \quad \cdots\cdots [44]$$

是故經由一閉合面之向量川流等於積分向量之散佈取之於全部容積包舉於面者此重要關係哥斯首得之謂之哥斯定理易方陣交錯線迹爲向量之散佈而六十四卦球面排列於哥斯之定理爲自明

自一容積而離開之向量總數爲下值

$$\int \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dxdydz$$

此適於任何容積若使容積爲甚小則括弧中之數等於向量之數出自單位容積故證明向量散佈之公式(§22〔12〕式)

§41　引出格里恩定理

今先算 div(SA) 於此則數量 S 與向量 A 作均爲空間涵數

$$\operatorname{div}(SA)=\frac{\partial A_x}{\partial x}S+\frac{\partial A_y}{\partial y}S+\frac{\partial A_z}{\partial z}S+A_x\frac{\partial S}{\partial x}+A_y\frac{\partial S}{\partial y}+A_z\frac{\partial S}{\partial z} \quad (7)$$

故
$$\operatorname{div}(SA)=S\operatorname{div}A+A\operatorname{grad}S \quad [45]$$

由哥斯定理但向量 A 非爲任意值而爲數量與其階度之乘積則〔44〕式爲下式

$$\int \operatorname{div}(S\operatorname{grad}S)\,d\tau=\int S\operatorname{grad}_n S\,df \quad (8)$$

由〔43〕式及〔45〕式得下式

$$\operatorname{div}(S\operatorname{grad}S)=S\Delta S+(\operatorname{grad}S)^2 \quad [46]$$

在特殊之例若數量之階度消滅於場之邊界則 (8) 式兩邊皆等於零而積分全域依〔46〕式得下式

$$\int S\Delta S\,d\tau=-\int(\operatorname{grad}S)^2d\tau \quad [47]$$

此爲格里恩定理(Green's Theorem)其首得之也

§42　引出斯篤克定理

哥斯定理可使一面積分(a surface-integral) 取自閉合之面轉換至一容積分 (a volume-integral) 取自閉合之容斯篤克 (Stoke's Theorem) 定理可使一線積分(a line-integral)取自閉合曲線轉換至一面積分取自面之閉合於曲線者

在任何向量 A 之場中可另作一向量 R 其值定於 A 之變量設一小

面積 a 閉合於曲線其長爲 s 沿曲線 s 取 A 向量之分向 A_s 之線積分 $\int A_s ds$ 由是 $R_n=\frac{1}{a}\int A_s ds$ 可證爲 R 向量之沿 n 線之分向而 n 線者垂直於 a 平面者也 R 之向遂爲沿 s 之線積分而右旋於是向量 R 謂之 A 向量之旋轉(curl of A)而以 curl A 記之

設於向量 A 之場中取任何形式之面其面積 f 而閉合於曲線其長 s 命 df 爲面積之部分 n 垂直於 df 而 ds 爲閉合曲線之部分於是斯篤克定理爲下式

$$\int \mathrm{curl}_n A\, df=\int A_s ds \quad (48)$$

是故一旋轉向量之垂直於閉合面分向之積分等於此向量之分向沿曲線之還繞面積者之線積分

命 ABC 爲閉合曲線而使面積之包囘於曲線者析爲若干小面積每小面積取其包囘之線積分相鄰之小面積其界線共之而線積分之取自兩小面積沿界線者其向相反如圖28示之於是積分線取諸一切小面積者之總和僅等於包囘總面積之曲線之線積分蓋惟最外曲線之包囘總面積者其線積分爲非兩取而不爲正負相消

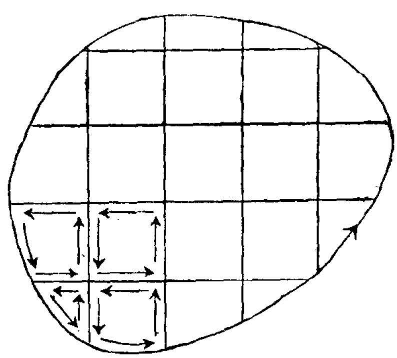


圖28　小面積共同界線之相消

旋轉向量 A 之分向對於 x,y,z 三軸之關係可得而算設一長方面積並行於 yz 平面而 dy 與 dz 爲其兩邊故垂直線在 x 之向而有下式

$$\operatorname{curl}_x A=\frac{1}{dydz}\int A_s ds \quad\cdots\cdots(9)$$

A_s 之線積分回繞長方面積故有下式

$$\int A_s ds=(A_y-A'_y)dy+(A'_z-A_z)dz \quad\cdots\cdots(10)$$

上式 A_y,A_z 與 A'_y,A'_z 爲面積之相對兩邊之值

但 $$A'_y-A_y=\frac{\partial A_y}{\partial z}dz,\quad A'_z-A_z=\frac{\partial A_z}{\partial y}dy$$

故 $$\int A_s\, ds=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)dydz \quad\cdots\cdots(11)$$

於是
$$\left.\begin{aligned}\operatorname{curl}_x A&=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \operatorname{curl}_y A&=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\\ \operatorname{curl}_z A&=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(12)$$

上式卽 §22〔13〕式之證明爲向量旋轉之公式而向量之旋轉亦可以下式表之

$$\operatorname{curl}_n A=\frac{1}{a}\int A_s ds \quad\cdots\cdots[49]$$

§43 其他向量算法之公式

關於向量算法之其他公式茲述如次階度之旋轉如下式求之

$$\operatorname{curl}_x(\operatorname{grad} S)=\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{grad}_z S)-\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{grad}_y S)$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right) \quad\cdots\cdots(13)$$

y 與 z 分向如上算故有下式

$$\text{curl grad } S=0 \cdots\cdots \text{〔50〕}$$

向量旋轉之散佈如下式求之

$$\frac{\partial}{\partial x}(\text{curl}_x A)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \cdots\cdots (14)$$

y 與 z 分向如上算故有下式

$$\text{div curl } A=\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}\right) \cdots\cdots (15)$$

於是有下式 $$\text{div curl } A=0 \cdots\cdots \text{〔51〕}$$

向量旋轉之旋轉如下式求之

$$\text{curl}_x(\text{curl } A)=\frac{\partial}{\partial y}(\text{curl}_z A)-\frac{\partial}{\partial z}(\text{curl}_y A)$$

$$=\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z} \cdots\cdots (16)$$

故 $$\text{curl}_x(\text{curl } A)=\frac{\partial}{\partial x}(\text{div } A)-\Delta A_x \cdots\cdots (17)$$

y 與 z 分向如上算故有下式

$$\text{curl curl } A=\text{grad div } A-\Delta A \cdots\cdots \text{〔52〕}$$

關於數量 S 與向量 A 之乘積之散佈公式前已說之(§41〔45〕式)關於數量 S 與向量 A 之乘積之旋轉如下式求之

$$\text{curl}_x(SA)=\frac{\partial A_z}{\partial y}S-\frac{\partial A_y}{\partial z}S+A_z\frac{\partial S}{\partial y}-A_y\frac{\partial S}{\partial z} \cdots\cdots (18)$$

y 與 x 分向如上算故有下式

$$\operatorname{curl}(SA)=S\operatorname{curl}A+[\operatorname{grad}S,A] \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔53〕}$$

向量乘(a vector product)之散佈如下式求之

$$[AB]_x=A_yB_z-A_zB_y \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}[AB]_x&=\frac{\partial A_y}{\partial x}B_z+\frac{\partial B_z}{\partial x}A_y-\frac{\partial A_z}{\partial x}B_y-\frac{\partial B_y}{\partial x}A_z\\
\frac{\partial}{\partial y}[AB]_y&=\frac{\partial A_z}{\partial y}B_x+\frac{\partial B_x}{\partial y}A_z-\frac{\partial A_x}{\partial y}B_z-\frac{\partial B_z}{\partial y}A_x\\
\frac{\partial}{\partial z}[AB]_z&=\frac{\partial A_x}{\partial z}B_y+\frac{\partial B_y}{\partial z}A_x-\frac{\partial A_y}{\partial z}B_x-\frac{\partial B_x}{\partial z}A_y
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(20)$$

故　$$\operatorname{div}[AB]=-A_x(\operatorname{curl}_xB)-A_y(\operatorname{curl}_yB)-A_z(\operatorname{curl}_zB)$$
$$+B_x(\operatorname{curl}_xA)+B_y(\operatorname{curl}_yA)+B_z(\operatorname{curl}_zA)\cdots\cdots(21)$$

由是　$$\operatorname{div}[AB]=-A\operatorname{curl}B+B\operatorname{curl}A \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔54〕}$$

向量乘之旋轉如下式求之

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}_x[AB]&=\frac{\partial}{\partial y}[AB]_z-\frac{\partial}{\partial z}[AB]_y\\
&=\frac{\partial}{\partial y}(A_xB_y-A_yB_x)+\frac{\partial}{\partial z}(A_zB_x-A_xB_z)\cdots\cdots(22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}_x[AB]=&A_x\operatorname{div}B-A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}-A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}-A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\\
&-B_x\operatorname{div}A+B_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+B_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+B_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\cdots\cdots(23)
\end{aligned}$$

y 與 z 分向如上算故有下式

$$\operatorname{curl}[AB]=A\operatorname{div}B-B\operatorname{div}A+(B\operatorname{grad})A-(A\operatorname{grad})B\cdots\text{〔55〕}$$

凡向量 A 之階度而係於向量 B 者 (the gradient of the vector A relative to the vector B)以記號$(B\operatorname{grad})A$ 作之

兩向量之數量乘之階度如下式求之其惟一有用之例爲一向量自乘之數量乘

$$\mathrm{grad}_x(AA)=2\left\{A_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+A_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right\}\cdots\cdots(24)$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}_x(A^2)=A_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$+A_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)+A_z\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\cdots\cdots(25)$$

故 $$\mathrm{grad}\left(\frac{A^2}{2}\right)=(A\ \mathrm{grad})A+[A,\mathrm{curl}\ A]\cdots\cdots〔56〕$$

$(B\ \mathrm{grad})A$ 求之如下式

$$(B\ \mathrm{grad})A=i\left\{\frac{\partial A_x}{\partial x}B_x+\frac{\partial A_x}{\partial y}B_y+\frac{\partial A_x}{\partial z}B_z\right\}$$

$$+j\left\{\frac{\partial A_y}{\partial x}B_x+\frac{\partial A_y}{\partial y}B_y+\frac{\partial A_y}{\partial z}B_z\right\}$$

$$+k\left\{\frac{\partial A_z}{\partial x}B_x+\frac{\partial A_z}{\partial y}B_y+\frac{\partial A_z}{\partial z}B_z\right\}\cdots\cdots〔57〕$$

第 九 章

易方陣引出希魯汀格電子方程式

§44 引出普生方程式

易方陣交錯線迹爲向量之散佈於是易方陣之電子方程式(§34〔34〕$_a$式)遂爲下示

$$\text{div } F = 4\pi\varrho \quad \text{〔34〕}_a$$

由§32〔26〕式及§39〔43〕式

$$F = -\text{grad}_a \psi \quad \text{〔26〕}$$

$$\text{div grad } \psi = \Delta\psi \quad \text{〔43〕}$$

則得下式

$$\Delta\psi = -4\pi\varrho \quad \text{〔58〕}$$

上式謂之普生公式(Poisson's Equation) 蓋普生始作之 (1913) 若密度消滅於場點則得

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{〔58〕}_a$$

上式拉普拉斯先於普生已得之(1789)謂之拉普拉斯公式 (Laplace's Eqation)而爲普生公式之特例

拉普拉斯公式可以算法得之如次命 a 爲場 q 點爲原點先作下式

$$r^2 = (x_a - x_q)^2 + (y_a - y_q)^2 + (z_a - z_q)^2 \quad (1)$$

由是 $$\frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_a}=-\frac{1}{r^2}\frac{x_a-x_q}{r}=-\frac{x_a-x_q}{r^3}\quad\cdots\cdots(2)$$

再部分微分之則得下式

$$\frac{\partial^2}{\partial x_a{}^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x_a-x_q)}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x_a}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x_a-x_q)^2}{r^5}\quad\cdots\cdots(3)$$

而 y_a 與 z_a 之二次部分導誘如上算三者相加爲下式

$$\Delta_a\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{3}{r^3}+\frac{3r^2}{r^5}=0\quad\cdots\cdots[58]_b$$

由此式乘以原點之量而勢 (Potential) 之拉普拉斯導誘消滅於每一場點之在於單一力原之場中者又復適於衆力原之體系惟場點毋得自爲力原是故在諸力原之聯屬分佈間者苟場點所在之處之密度爲零則亦適用於上式

前論力原則爲間離者(§32(22)式 discrete sources) 今廣之爲諸力原之聯屬分佈(a continuous distribution of sources)力原之量 (the strength of source) 在單位容積者謂之密度 (dencity) 而以 ϱ 記之每容積部分 $d\tau$ 有力原之量 $\varrho d\tau$ 而 ϱ 爲位於容積部分之密度之值由§32(22)式則任何場點之勢爲下式

$$\psi=\int\frac{\varrho d\tau}{r}\quad\cdots\cdots[59]$$

上式 r 爲容積部分與場點之距

於場點所在作一小球其半徑爲 a 在其中 ϱ 爲常數積分此球視作球殼乃有下式

$$\varrho\int_0^a\frac{4\pi r^2dr}{r}=4\pi\varrho\frac{a^2}{2}\quad\cdots\cdots(4)$$

上式 a 爲極小故積分在小球之包舉場點爲可略之數

由§32〔27〕$_a$式而視諸力原爲聯屬分佈則爲下式

$$\int F_n df = 4\pi \int \varrho d\tau \quad \text{〔60〕}$$

由哥斯定理上式左邊之面積分可轉換爲場量散佈之容積分故〔60〕式變爲〔34〕$_a$式

由〔58〕式及〔59〕式得下式

$$\Delta_a \int \frac{S d\tau}{r} = -4\pi S \quad \text{〔61〕}$$

上式右項之 S 爲場點數量之值

若〔61〕式之 S 易之以向量 A 之三分向而三式乘以坐標系之三基本向量而相加則得下式所示之重要關係

$$\Delta_a \int \frac{A d\tau}{r} = -4\pi A \quad \text{〔62〕}$$

上式適用於任何向量

§45　引出希魯汀格方程式

太極圖者易方陣之交錯線迹爲 0,1 之變是故坐標在周而有速度由是得太極圖之基本方程式(§37〔40〕式)由此式之用狄拉克爲電子極坐標之算而得氫原子之博漠系景線(§35〔38〕式) 氫原子者一電子之繞核而運轉也是故易方陣之爲電子已得有證而交錯線迹之散佈遂爲電力場量之散佈而〔34〕$_a$式(§34)爲易方陣之電子方程式

易方陣交錯線迹垂直於場衡面故爲數量場之階度而數量場之階度爲一向量此向量之散佈乃爲電子故由§39〔43〕式及§44〔58〕式得下式

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi=-4\pi\varrho \cdots\cdots〔34〕_b$$

上式與〔34〕$_a$ 式相同亦爲易方陣之電子方程式用負值者因電力場量 F 等於$-\operatorname{grad}_a\psi$ 之故也(§32〔26〕式)而 $\operatorname{grad}_q\psi=-\operatorname{grad}_a\psi$ 蓋 a 爲場點 q爲原點而視場點爲定原點爲變則爲 $\operatorname{grad}_q\psi$ 反是者爲 $\operatorname{grad}_a\psi$ 故用 $-\operatorname{grad}_a\psi$ 者爲電子用極坐標之故也

在正弦式之振動 ψ 等於振幅 A 與振相角 θ 之正弦乘積故有下式

$$\psi=A\sin\theta \cdots\cdots(5)$$

因 $$\frac{\partial\theta}{\partial t}=2\pi\nu \cdots\cdots(6)$$

上式 ν 爲振數而 ν 爲週期 T 之倒數

故 $$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=A\frac{\partial^2(\sin\theta)}{\partial t^2}=-4\pi^2\nu^2A\sin\theta=-4\pi^2\nu^2\psi \cdots\cdots〔63〕$$

若 t 之值易之以 $t-x/u$ 則 x 爲距離原點之長而(5)式作如下式

$$\psi=A\sin 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{u}\right) \cdots\cdots〔64〕$$

於是 $$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{A\sin 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{u}\right)\right\}$$

$$=A\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{u}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left\{2\pi\nu\left(t-\frac{x}{u}\right)\right\}$$

$$=-A\frac{2\pi\nu}{u}\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{u}\right) \cdots\cdots(7)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{-A\frac{2\pi\nu}{u}\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{u}\right)\right\}$$

$$=-A\frac{2\pi\nu}{u}\left\{-\sin 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{u}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x}\left\{2\pi\nu\left(t-\frac{x}{u}\right)\right\}$$

$$=\frac{2\pi\nu}{u}\psi\left(-\frac{2\pi\nu}{u}\right)=-4\pi^2\left(\frac{\nu}{u}\right)^2\psi \quad\cdots\cdots(8)$$

若用三度坐標則爲下式

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-4\pi^2\left(\frac{\nu}{u}\right)^2\psi \quad\cdots\cdots〔65〕$$

於是得波動力學之基本公式(§31(1)式)

$$\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\Delta\psi \quad\cdots\cdots〔66〕$$

由波羅吉利物質波方程式(§31〔21〕式)

$$uv=c^2 \quad\cdots\cdots〔21〕$$

及相對論方程式　$h\nu=mc^2$ ……〔67〕

得下式　$h\nu=muv$ ……〔68〕

於是〔65〕式爲下式

$$\Delta\psi+\frac{8\pi^2m}{h^2}\cdot\frac{1}{2}mv^2\psi=0 \quad\cdots\cdots(9)$$

上式 $\frac{1}{2}mv^2$ 爲動能而動能爲全能力 E 與勢能 V 之差故作下式

$$\Delta\psi+\frac{8\pi^2m}{h^2}(E-V)\psi=0 \quad\cdots\cdots〔69〕$$

上式爲希魯汀格方程式由〔43〕式得下式

$$\mathrm{div\ grad}\ \psi+\frac{8\pi^2m}{h^2}(E-V)\psi=0 \quad\cdots\cdots〔34〕。$$

上式亦爲易方陣之電子方程式

希魯汀格以爲量子之情形若通常所知者可得以他法求之蓋勿用全數 (Whole numbers) 之誼而整數云者猶之動繩直而使之波其節數是也(the node-number of a vibrating string) 此與哈密爾登與雅谷

弼(Hamilton-Jacobi)之微分式相關聯示如下式

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)=E \quad \text{〔70〕}$$

此式可代表涵數之和而每一涵數代表一獨立變數 q

命

$$S=K \log \psi \quad (10)$$

上式 ψ 爲一新未知數而爲坐標系之關係涵數之積 K 爲常數於是有下式

$$H\left(q, \frac{K}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial q}\right)=E \quad \text{〔70〕}_a$$

若不論相對論之物質隨速度而變則上式可變爲 ψ 之二次式及其第一導誘 (a quadratic form of ψ and its first derivatives) 而等於零今求一涵數 ψ 對於其任何變值此二次式之積分取諸全坐標之空間者爲固定(stationary)而 ψ 在任何處爲實數(real) 爲單值 (single-valued) 爲有限(finite)爲聯屬(continuously) 而可微分至於二次由是量子之情形易之爲變數之誼

命 H 爲凱伯勞運動(Keplerian motion)之哈密爾登涵數(Hamilton function) 而示 ψ 之擇可適於能力 E 之所有正值而於負值則惟間離者爲適之此謂在變數問題有一間離之光譜景線(a discrete-spectrum) 與一聯屬之光譜景線 (a continuous spectrum) 屬之相應之值間離景線符於博漠之值(Balmer terms) 而聯屬景線則與拋物軌道(the hyperbolic orbits)之能力相中數之符於 K 者必等於 $h/2\pi$

變數公式之作對於坐標系則任意擇之若用平直坐標則〔70〕$_a$ 式爲下式

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2-\frac{2m}{K^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi^2=0 \quad\text{〔70〕}_b$$

上式 e 爲電量 m 爲電子質量 $r^2=x^2+y^2+z^2$ 由是變數之題作式如次

$$\delta J=\delta\iiint dxdydz\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2-\frac{2m}{K^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi^2\right]=0 \quad (11)$$

上式積分取於全空間如常法求之如下式

$$\tfrac{1}{2}\delta J=\int df\delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\iiint dxdydz\delta\left[\Delta\psi+\frac{2m}{K^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi\right]=0 \quad (12)$$

是故有兩式其一　$\Delta\psi+\dfrac{2m}{K^2}\left(E+\dfrac{e^2}{r}\right)\psi=0$ ……〔69〕$_a$

上式同〔69〕式其二　$\displaystyle\int df\delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}=0$ ……〔71〕

上式 df 爲極小閉合面之部分而積分取諸

第十章

卐字之解

§46 卐字爲易方陣之核心

易方陣交綜線迹爲向量之旋轉前已證之卐卍之來歷由易方陣交綜線聯三方取之羨餘者十有六卦析之爲二得左右轉若風車之旋余又聯之以兩線左旋者遂成卐字右旋者爲卍字(§12 圖 10)此兩者均示向量之旋轉關於量子方程式電磁波方程式並由斯出凡相對論之基本學理皆在於茲而立義基本乃在五度故卐字之重要實不亞於太極圖惟是太極圖人盡知之雖不識其爲電子然知其與八卦有聯繫人無疑慮卐若字亦盡人皆識然與八卦之聯繫未之前言也而於物理學之運用更無知之者矣書闕有間此非於八卦之解徹底澄清未易言也

§47 光線四向散佈之義

今有平面爲圓是則兩度自中心至周爲圓半徑半徑之種種方向爲二度中一切可能之方向若自中心立一軸垂直於圓平面是爲第三度而此軸與二度中一切方向均垂直若僅許用二度而欲說明第三度之義則與一切半徑爲直角者適成圓周之種種切線依種種切線之方向集合之於一點亦

成一圓而爲自中心四向散射之種種半徑

在四度中一線可與一體爲垂直體中無數線均與爲直角若球面之種種切線代表三度中一切可能方向則四度中一線可與三度中一切方向均爲直角者在三度中固不得見惟自球中心至於球面之一切半徑爲能與球面之種種切線相與垂直於是所謂第四度者在四度中固一線也而空間三度中視之適爲自一點四向散射成一球體之無數線

凡一質點在三度中因某種緣由而得有光速之速度卽是在第四度而與空間中一切方向均垂直故光線必四向散佈此之謂放光

余爲此說欲以罕譬而喻使初學於第四度之實性昔日吾昧然今日吾昭然

§48　八卦爲五度之義

光線爲時間與光速之乘積ct時間線爲光速與時間之乘積又乘之負一之平方ict此二者均第四度故時間線對於三度中一切方向均垂直若作立方代表空間S_x, S_y, S_z爲三邊時間一線與三邊均垂直而空間中惟可作三線T_x, T_y, T_z分別垂直於三邊然在四度實一線耳於是另作立方以T_x, T_y, T_z爲三邊如圖29示之若$S_x S_y S_z$爲空間三度則T_x, T_y, T_z合一而爲第四度反之若T_x, T_y, T_z爲空間三度則$S_x S_y S_z$合一而爲第四度

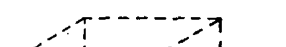


圖29　空時兩三度體

若以立方之對角線代表第四度則此線視作與三度均垂直如圖30示之S_x,S_y,S_z,S_τ 爲一四度體($\tau=ict$)則E_x,E_y,E_z,E_τ 合一而爲第五度反之E_x,E_y,E_z,E_τ 爲一四度體則 S_x,S_y,S_z,S_τ 合一而爲第五度若 ψ 爲 S 三度體系中一向量 φ 爲 T 三度體系中一向量此兩向量不能相加因 S 若三度則 T 將合一爲第四度反之 T 若三度則 S 將合一爲第四度

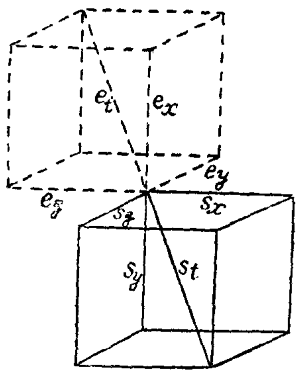


圖30 陰陽兩四度體

八卦所說爲五度五度互交爲直角故爲五線而四度中四度互交爲直角故爲四線第五度配四度分別與之爲垂直故有陰陽兩四度體遂成八卦震(☳)一度兌(☱)二度乾(☰)三度離(☲)爲時間線爲第四度於是巽坎艮坤合一爲第五度反之巽(☴)一度艮(☶)二度坤(☷)三度坎(☵)爲時間線爲第四度於是乾兌離震合一爲第五度故圖30爲八卦

三度中三度互交直角而第四度者乃配三度分別與之爲垂直故有空時兩三度體遂成六線如圖29示之於是五度之在三度乃配

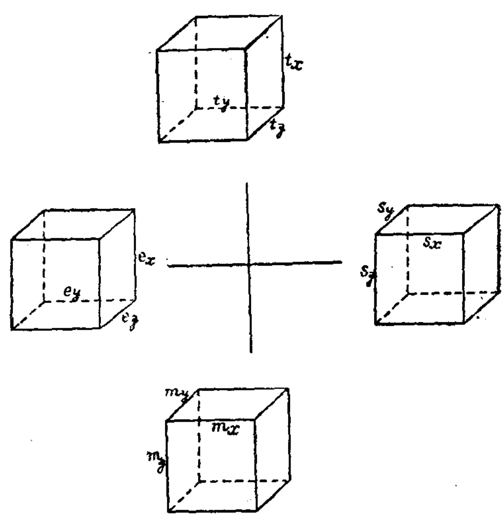


圖 31 空時電磁四三度體

六線配空間者三配時間者三遂成十二線如圖 31 示之 S_x,S_y,S_z 者空間三度也 T_x,T_y,T_z 者時間三度也 E_x,E_y,E_z 者電三度也 M_x,M_y,M_z 者磁三度也 E 與 M 共六度總爲第五度 S 與 M 線形一致此磁麗於空乃離之從坤也 E 與 T 線形一致此時麗於電乃坎之從乾也若命空時電磁爲 A, B,C,D 爲 1,2,3,4 則十二之數有三匝圖 32 所示伏羲八卦而坎離移其位

乾屬陽五以陽居陽兌屬陰六以陰居陰離屬陰二以陰居陰震屬陽初以陽居陽巽屬陰四以陰居陰坎屬陽五以陽居陽艮屬陽三以陽居陽坤屬陰二以陰居陰

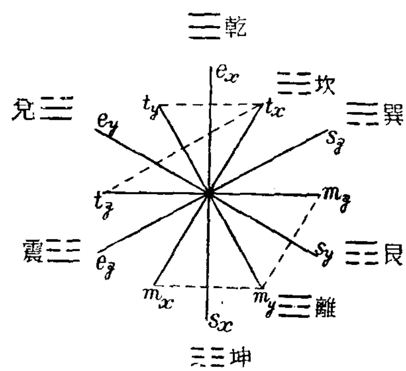


圖 32 水火不相射

乾屬陽位在五惟坎同之坎中之陽乃乾也若震艮之五皆陰矣故居初居三此陽卦正位也坤屬陰位在二惟離同之離中之陰乃坤也若巽兌之二皆陽矣故居四居六此陰卦正位也由此之說坎傍乾離傍坤其義可知橫渠所謂陰陽之精互藏其宅也說卦傳曰天地定位山澤通氣雷風相薄水火不相射所謂水火不相射正如上圖坎離移其位也若伏羲原圖離東坎西則必謂之水火相射矣

§49 易方陣之命數方陣

今以易方陣分而爲之二如圖 33 示之 I,II 兩方陣稱曰命數方陣之卦位兩圖凡六十四卦其中有値於 I 者無値於 II 有値於 II 者無値於 I

乾		大有			需		泰
	兌		歸妹	中孚		損	
同人		離			既濟		明夷
	隨		震	益		頤	
	大過		恒	巽		蠱	
訟		未濟			坎		師
	咸		小過	漸		艮	
否		晉			比		坤

I

	夬		大壯	小畜		大畜	
履		睽			節		臨
	革		豐	家人		賁	
无妄		噬嗑			屯		復
姤		鼎			井		升
	困		解	渙		蒙	
遯		旅			蹇		謙
	萃		豫	觀		剝	

II

圖 33　命數方陣之卦位

皆作同心圈視之除震巽恆益作中心外 I 有三圈 II 有三圈而兩者相間 II 之三圈自內至外命之曰 1,2,3 I 之三圈自內至外命之曰3/2,5/2,7/2中心四卦命之曰½作圖34稱曰令甲方陣令乙方陣

今以卐卍兩方陣（§12圖10）用令乙之數示之如圖35其 I 左旋其 II 右旋實線爲交綜線之聯虛線則余益焉遂成卐卍兩形示左右旋在物理學電子自旋有左有右命之以半量子數±½今命卐方陣爲+½卍方陣爲−½此值與令甲中心四卦作½者無涉而左旋右旋謂之差一之數交綜線者自 A 至 B 之向量也亦以爲自 B 至 A 之向量

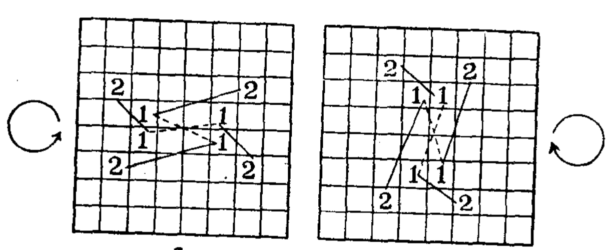
7/2		5/2			5/2		7/2
	5/2		3/2	3/2		5/2	
5/2		3/2			3/2		5/2
	3/2		1/2	1/2		3/2	
	3/2		1/2	1/2		3/2	
5/2		3/2			3/2		5/2
	5/2		3/2	3/2		5/2	
7/2		5/2			5/2		7/2

令甲

	3		2	2		3	
3		2			2		3
	2		1	1		2	
2		1			1		2
2		1			1		2
	2		1	1		2	
3		2			2		3
	3		2	2		3	

令乙

圖 34　命數方陣 I 令甲 II 令乙

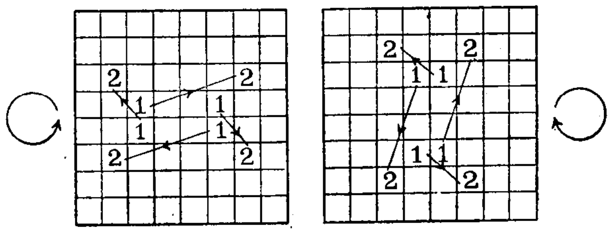


I　II

圖 35　卐卍方陣之數位

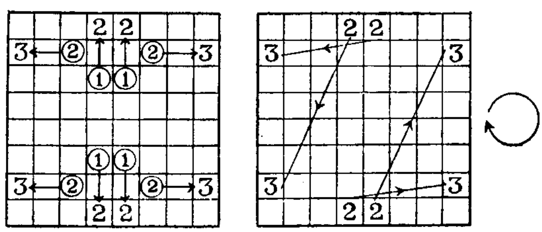
圖36卐卍兩方陣所示俱爲 1 至 2 若兩者之合則必認其一不變其一爲變蓋卐爲 +½而卍爲

一$\frac{1}{2}$以兩者合則其數差一故若視卐爲不變則卍方陣中 1 變 2 而 2 變 3 但方陣之變必依行列故 1 變 2 在縱行 2 變 3 在橫列如圖37 I



I　卐方陣　　II　卍方陣

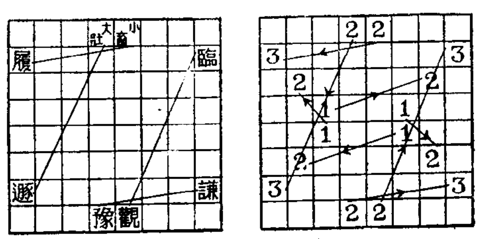
圖 36　卐卍方陣 1→2 向量



I　卍方陣之變　　II　卍方陣之變方陣

圖 37　卍方陣之變

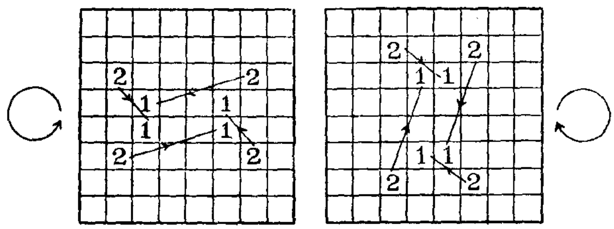
左圖示卍方陣之變其爲 1→2 者乃變之爲 2→3 交綜線迹亦示右旋與卐方陣合則爲第一光波方陣以 $h\nu_{nm}$ 記之如圖38所示 I 卍方陣之變方陣之卦位 II $h\nu_{nm}$ 方陣用令乙之數位



I　卍變方陣卦位　　II　$h\nu_{nm}$ 方陣

圖38　I 卍變方陣卦位 II $h\nu_{nm}$ 方陣數位

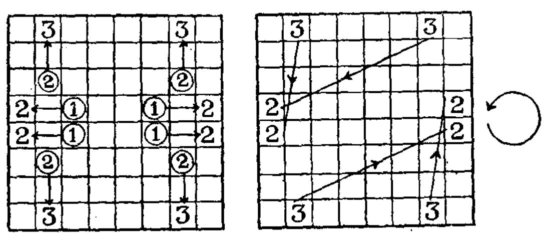
卐卍兩方陣之交綜線迹亦可視爲 2 至 1 如下圖示之



I 卐方陣 II 卍方陣

圖 39 卍卐方陣 1←2 向量

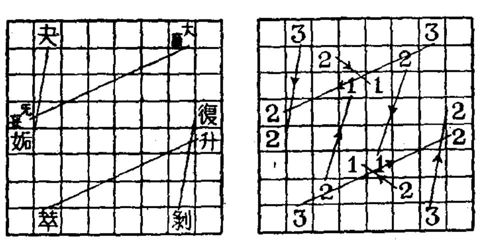
卐卍之合認卍不變則卐爲變以＋½移合－½亦差一之數由是卐方陣之中 1 變 2 而 2 變 3



I 卐方陣之變 II 卐方陣之變方陣

圖 40 卐方陣之變

上圖示卐方陣之變其中 1 變 2 在橫列 2 變 3 在縱行卐方陣之變方陣 2 ← 3 爲交綜線迹亦示左旋與卍方陣之合遂爲第二光波方陣以 $h\nu_{mn}$ 記之圖41所示 I 卐方陣之變方陣之卦位 II $h\nu_{mn}$ 方陣用令乙之數位



I 卐變方陣卦位 II $h\nu_{mn}$ 方陣

圖41 I 卐變方陣卦位 II $h\nu_{mn}$ 方陣數位

§50 陰陽電子與第一第二光波四方陣之週期變化

第一第二光波方陣兩者之合乃爲介乙方陣而陰陽電子方陣兩者之合則爲介甲方陣此四方陣有其週期變化以陽電子方陣作始以其行1,2,3,4與5,6,7,8相對易則變爲第一光波方陣以第一光波方陣之列1,2,3,4與5,6,7,8相對易則變爲陰電子方陣以陰電子方陣之行5,6,7,8與1,2,3,4相對易則變爲第二光波方陣以第二光波方陣之列5,6,7,8與1,2,3,4相對易則變爲陽電子方陣如是爲一周此即§25自綜卦之四變方陣(圖20)與錯綜卦之四變方陣(圖22)之合型也兩者之甲之合爲陽電子方陣乙之合爲第一光波方陣丙之合爲陰電子方陣丁之合爲第二光波方陣示之如圖42

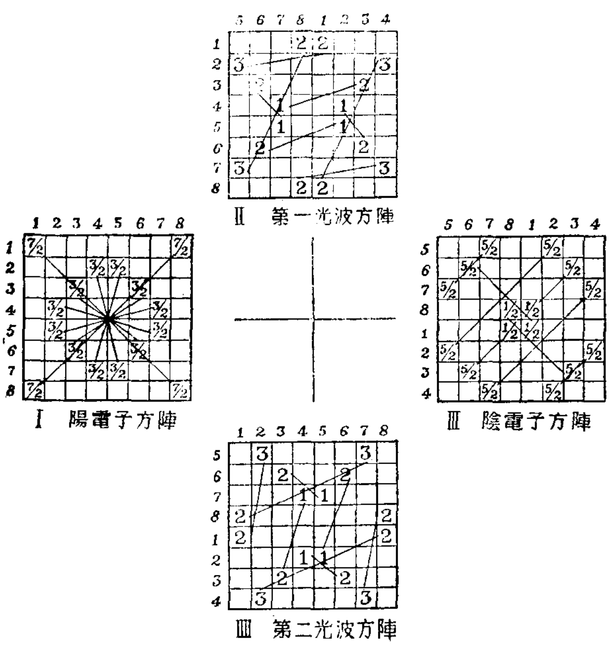


圖42 陰陽電子與第一第二光波方陣之四變

圖42四方陣之解有二塗其一用方陣算法則陰陽電子方陣皆引出希魯汀格電子方程式(§45

〔69〕式）第一第二光波方陣皆引出麥克斯威電磁波方程式亦卽波動力學基本方程式（§45〔66〕式）其算在此余不及述而於他處說之（參觀拙著綜合物理學）

其二用方陣形學第一第二光波方陣皆呈雙曲線之型而陰陽電子方陣則皆爲圓此於卦位已可見之惟是今世之算尚未有方陣形學余亦尚未能條理之使成獨立之科斯將有待於異日而易方陣之爲方陣形學則既其然矣故卐卍兩方陣與第一第二光波方陣之幾何解析余將略述其梗概以明卐字之根本意義

形學者以既成定理釋所未知而方陣形學之基礎立於較廣泛之域其所引援不惟形學之既成定理且及於相對論量子論物質波論諸凡物理學之定理皆得資之以爲證

§51 卐卍方陣之幾何解析

設有圓平面 A_1,A_2 ……等代表平面上一切方向俱爲半徑 B_1,B_2 ……等代表圓周上種種切線皆垂直於半徑如圖43之 I 示之依此種種切線之方向另作圓平面如圖 43 之 II 示之於是 B_1,B_2……等爲半徑而圓周切線乃爲 A_1,A_2……等若逆矢向 I 爲右旋 II 爲左旋

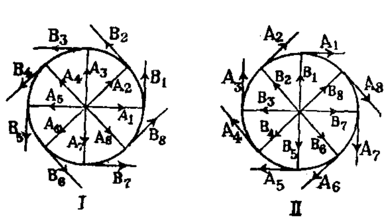


圖43 圓半徑與周切線之互易

圖44之 I A_1,A_2……等爲圓平面之半徑 B 爲垂直於圓中心之線圖 44

之 II 爲圓平面而 B_1, B_2 …… 等爲之半徑 A 爲垂直於圓中心之線

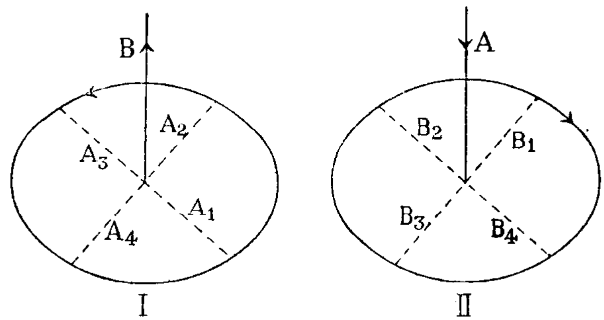


圖44　圓平面與中心垂直線之互易

平面上一切方向可以 x, y 兩軸交直角者代表之蓋任何向量依其與 x 軸所成角度可析爲正弦餘弦兩向量而並行於 y 與 x 凡一圓平面以對徑爲軸而旋一周則包舉一空間故空間三度得以圓平面代表之命圖 44 之 I 圓平面 A 代表空間則垂直於中心之 B 軸代表第四度時間向量此與空間中任何向量均垂直但在空間中僅能以一點代表之蓋時間向量在空間中爲合一也若必欲作線則垂直於種種方向者必畫種種線如圖 43 之 I 所示 B_1, B_2 …… 等之爲圓周切線於是在周種種切線卽代表第四度而符合於圖 44 之 I 之 B 軸斯乃表之以斯篤克定理(§42〔48〕式)

$$\int \mathrm{curl}_n A\, df = \int A_s ds \quad \text{〔48〕}$$

此式所示爲一旋轉之向量之垂直分向之積分等於此向量之分向沿曲線之還繞面積者之線積分又以圓平代表空間而垂直圓中之線代表第四度則亦旣符於哥斯定理(§40〔44〕式)

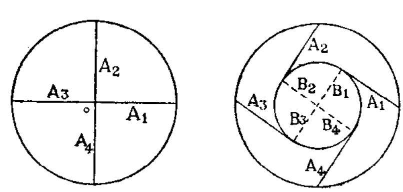
$$\int A_n df = \int \mathrm{div}\, A\, d\tau \quad \text{〔44〕}$$

此式所示爲經由一閉合面之向量川流等於積分向量之散佈取諸全部容積包舉於面者

圖 43 I A_1,A_2…… 等爲圓半徑代表空間一切向量 B_1,B_2…… 等爲圓周切線代表第四度時間一線 II B_1,B_2…… 等爲圓半徑代表空間一切向量 A_1, A_2 等爲圓周切線代表第四度一線謂之時間然而 I 之 A_1,A_2…… 等卽 II 之 A_1,A_2…… 等而 I 之 B_1,B_2…… 等亦卽 II 之 B_1,B_2…… 等故兩空間者爲交錯量易言之 B 之爲空間者於 A 爲時間線而 A 之爲空間者於 B 爲時間線此卽 §48 圖 29 所示 S_x,S_y,S_z 爲空間三度則 T_x,T_y,T_z 合一爲第四度反之 T_x,T_y,T_z 爲空間三度則 $S_xS_yS_z$ 合一爲第四度

圖 44 I 垂直於圓中之 B 一線卽圖 43 I 圓周之 B_1,B_2…… 等一切切線而圖 44 II 垂直於圓中之 A 一線卽圖 43 II 圓周之 A_1,A_2…… 等一切切線故在圖 44 I 之 B 線卽 II 之圓平面而 II 之 A 線卽 I 之圓平面故 A,B 兩線爲交錯量

命 0 爲圓中心 A_1,A_2,A_3,A_4 俱爲半徑互交直角成十字形則代表圓平面一切方向命此圓平面代表空間則時間線 B 垂直於圓中心而空間中僅爲一點如圖 45 之 I 所示之 0 爲圓平面之中心一點是也若此 0 點擴張而成另一空間如圖 45 之 II 所示



I　　II

圖 45　卐字之解析

則 B_1,B_2,B_3,B_4 爲互交直角之圓半徑亦作十字形而代表新空間中一切方向於是舊空間之 A_1,A_2,A_3,A_4 被推出而作新空間之圓周切線在新空間 A 乃爲時間線雖有 $A_1A_2A_3A_4$ 四線亦惟視之若一於是圖 45 之 II 已形成卐字此爲卐方陣之解析

卐卍兩方陣雖分左右旋可同義解之命 0 爲圓中心 $B_1B_2B_3B_4$ 爲半徑互交直角形成十字代表圓平面中一切方向命此圓平面代表空間則時間線爲 A 垂直於圓中而空間中僅如圖 46 之 I 所示之 0 爲圓平面之中心一點是也若此 0 點擴張而成另一空間如圖46之 II 所示則 A_1,A_2,A_3,A_4 爲互交直角之十字形爲圓半徑而代表新空間中一切方向於是舊空間中之 B_1, B_2,B_3,B_4 被推出而作新空間之圓周切線在新空間 B 爲時間線雖 B_1,B_2,B_3,B_4 爲四線亦惟視之若一於是圖 46 之 II 巳形成卍字此爲卍方陣之解析

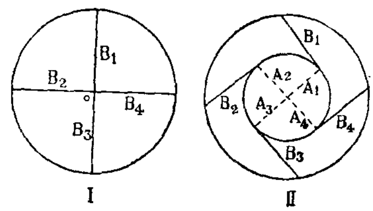


圖 46　卍字之解析

§52　第一第二光波方陣幾何解析

若圖45之 II B 空間中心再擴張一新空間如圖47之 I 所示則新空間命之曰 C 以01 爲半徑而 B 空間爲 12 A空間爲 23 於是有卍字在 B 而有卐字在 A 在 1,2,3 三周 1 有四值 2 有八值 3 有四值若有 1,2,3,4 爲週期則 4 符於 0 而02在一直線命之以空間向量13在一直線命之以時間向量故圖47之 I 其中之 2 屬於空間但 2 有八值則必分之以正負若縱橫爲正返諸空間則四隅爲負仍留時間如圖 47 之 II 雙曲線之域爲空間向量則A空間中四正 2 之值移於其中於是圖47之II卽第二光波方陣 $h\nu_{mn}$ 成於卐卍兩方陣之合(§49 圖 41 II)

圖48之 I 爲第二光波方陣依明哥斯基雙曲線畫分空間區域與時間

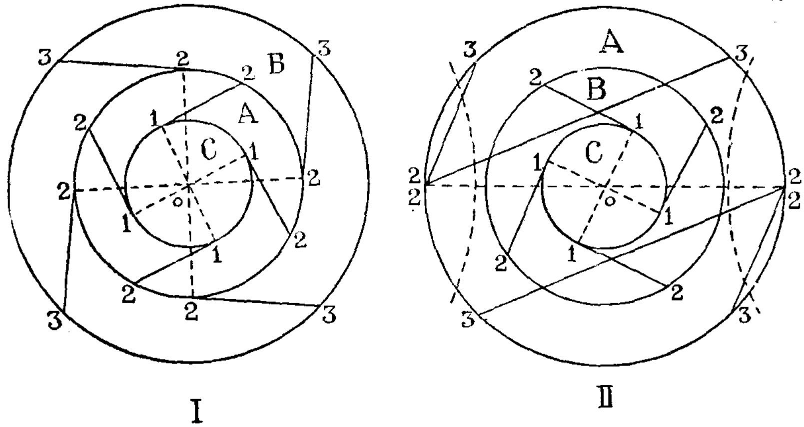


圖 47 $h\nu_{mn}$ 方陣之解析

區域 D_1D_1' 與 D_2D_2' 爲漸近線則有 2 之四正之値在空間向量以 A_1A_1' 與 A_2A_2' 兩線示之在時間區域有爲 1,2,3 者四若一質點之行動與一直線相遇於等距離 1,2,3 之處則其行迹必已爲波與漸近線 D_1D_1' 相鄰者有兩 1,2,3 其向相反與 D_2D_2' 相鄰者有兩①,②,③ 其向亦相反此必電磁兩波

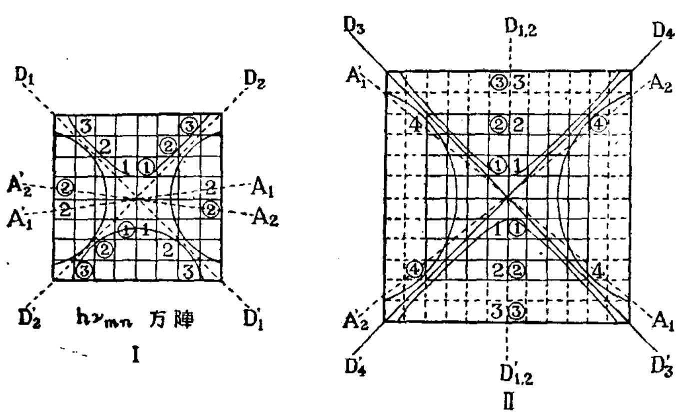


圖 48 $h\nu_{mn}$ 方陣化爲光波

蓋電磁爲交錯量而兩漸近線相與爲直角故圈數以示辨

第四度視作一向量如圖 48 之 II 於是 D_1,D_2 合一而另用 D_3,D_4 爲漸近線由是電磁兩波之行動同一方向而 A_1A_1' 鄰於 D_3D_3' A_2A_2' 鄰於 D_4D_4' 則 2 之值乃變爲 4 而 4 之週期 4 符於 0 由 2 變 0 卽是反向其義猶 §51 圖 44 之 I 圓平面 A 變爲 II 之爲中心垂直線 A 由是 B 本爲時間線乃可作圓平面而以空間視之是卽 T 本時間線而若 S 三度合一爲時間線則 T_x, T_y, T_z 視作空間三度蓋惟三度可見形相而四度無形不可覩也光爲第四度而其可得見也亦惟其四向散佈已變若空間之形然後可覩於斯則觀察者忘其自己之空間而同化於放光見象之空間此所謂化空間爲零由是之故光波方陣必變其中空間向量之值 2 以爲 0 否則無以見焉

圖 47 之 I 爲卐卍兩形之合卽第二光波方陣 $h\nu_{mn}$ 也其中卍則不變卐則爲變如圖 40 所示若第一光波方陣 $h\nu_{nm}$ 爲卐卍兩形之合如圖38之

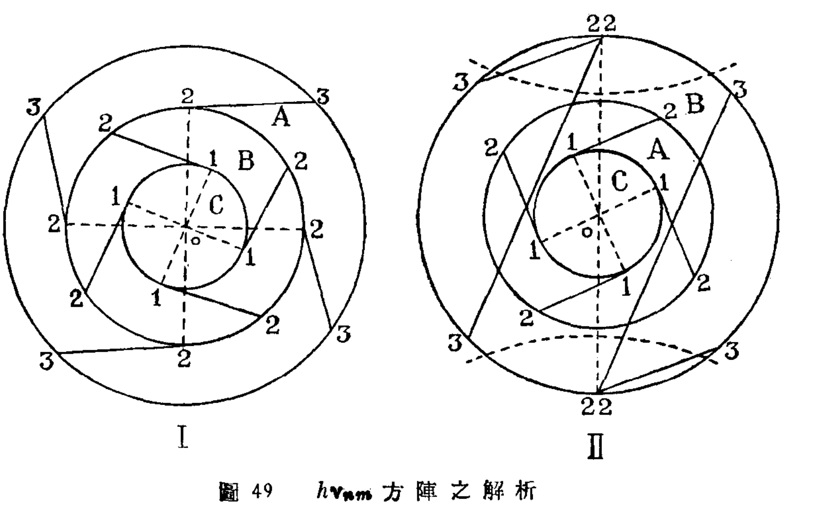


圖 49　$h\nu_{nm}$ 方陣之解析

II所示而其中卐則不變卍則爲變如圖 37 所示今作圖 49 以示第一光波方陣之解析而與圖47爲第二光波方之解析者同釋

圖49 I 爲圖 46 之 II A 空間中心再擴張一新空間命之以 C II 雙曲線之域爲空間區域以 2 之四正之値移於者中爲空間向量此卽第一光波文陣 $h\nu_{nm}$ 成於卐卍兩方陣之合(§49 圖 38 II)

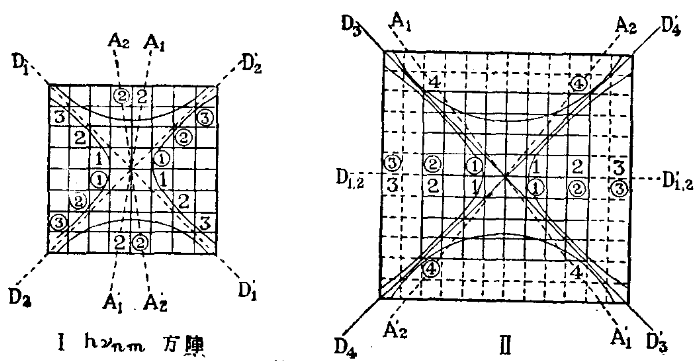


圖 50 $h\nu_{nm}$ 方陣化爲光波

圖50 I 爲第一光波方陣$h\nu_{nm}$依明哥斯基雙曲線畫分空間區域與時間區 D_1D_1' 與 D_2D_2' 爲漸近線 II 空間向量四 2 之値化之爲 0 故另作D_3,D_4爲漸近線而 D_1,D_2 合爲一由是電磁兩波之行動同一方向

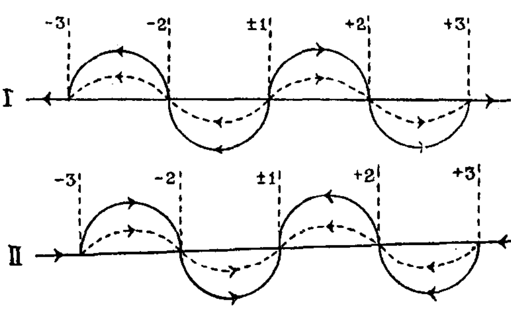


圖51 I $h\nu_{nm}$爲放射光波 II $h\nu_{mn}$爲吸收光波

前論$h\nu_{nm}$光波成於卐

卍兩方陣之合其中數位皆 1→2 卐則不變卍則爲變而卍乃爲 2→3 故示之如圖 51 之 I

$h\nu_{mn}$ 光波成於卍卐兩方陣之合其中數位皆 1←2 卍則不變卐則爲變而卐乃爲 2←3 故示之如圖 51 之 II

上圖所示虛線爲電波實線爲磁波而 $h\nu_{nm}$ 爲放射光波 $h\nu_{mn}$ 爲吸收光波由矢向而知之也電磁兩波互交直角

若有 ab 兩向量爲直角在三度中視 a 爲 0 視 b 爲 $+1$ 則不能同時又視 b 爲 0 視 a 爲 -1 而四度中不然視 a 爲 0 而 b 爲 $+1$ 同時亦視 b 爲 0 而 a 爲 -1 故光波方陣中 ± 1 卽三度中之 0 位故 $+1$ 與 -1 合於一如圖 51 I, II 示之

易方陣用河圖數則去中五猶斯義也五爲週期則五當於 0 而六爲一四爲負一去其中五故 $+1$ 與 -1 合於一(§30)

§53　引出波動力學基本方程式

由§52圖 51 之波形可得引出波動力學基本方程式假設有繩先爲平直並行於 x 軸然後動之使波以 u 之速度而右行如圖52示之此波動於 y 軸方向時起高下若於 A 之 0_1 處量 x 與 y 之值則 y 爲 x 之涵數 t 時後此波傳至 B 處於是擇定 0_2點

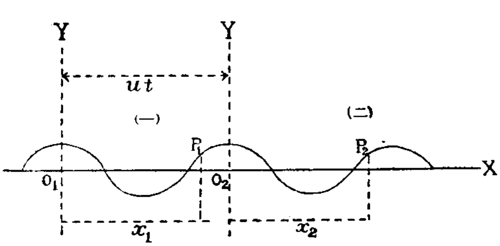


圖 52　波動方向沿 X 軸

其波相同於 0_1 自 0_1 至 0_2 謂之 ut 量 x,y 之值於 0_2 則 B 處之波動情形與 A 處者正復相同

故 $y=f(x_1)$，$y=f(x_2)$ 若仍由 0_1 計之則 $x_2=x_1-ut$

於是
$$y=f(x-ut) \quad\cdots\cdots(1)$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}=-uf'(x-ut) \quad\cdots\cdots(2)$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}=f'(x-ut) \quad\cdots\cdots(3)$$

故
$$\frac{\partial y}{\partial t}=-u\frac{\partial y}{\partial x} \quad\cdots\cdots(4)$$

因此
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=u^2f''(x-ut) \quad\cdots\cdots(5)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f''(x-ut) \quad\cdots\cdots(6)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=u^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad\cdots\cdots(7)$$

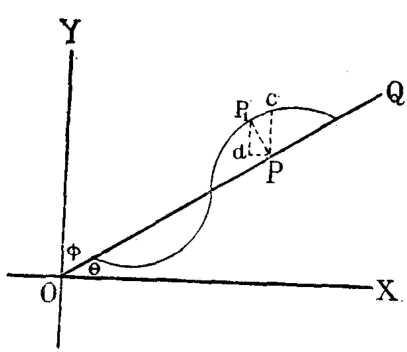


圖53 波動方向在 xy 平面

在 x 軸之波動公式如上式若使繩直動於 xy 平面而與 x 軸成 θ 角與 y 軸成 φ 角如圖 53 示之 OQ 為繩直 $P(x,y)$ 為未動時之點 $P_1(x,y)$ 為動時之點

命 $l=\cos\theta$，$m=\cos\varphi$，$OP=R$，$PP_1=S$

則得 $S=f(R)$

書(1)式如 $$S=f(R-ut)$$

因 $$S_x=Pd,\quad S_y=Pc$$

故 $$S_x=f_x(R-ut),\quad S_y=f_y(R-ut)$$

由是 $$S_x=f_x(lx+my-ut) \tag{8}$$

$$S_y=f_y(lx+my-ut) \tag{9}$$

故 $$\frac{\partial^2 S_x}{\partial t^2}=u^2 f_x''(lx+my-ut) \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2}=l^2 f_x''(lx+my-ut) \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2}=m^2 f_x''(lx+my-ut) \tag{12}$$

故得 $$\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2}=f_x''(lx+my-ut) \tag{13}$$

上式代入(10)式得 $$\frac{\partial^2 S_x}{\partial t^2}=u^2\left(\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2}\right) \tag{14}$$

若此繩直不在 xy 平面而在一空間與 x,y,z 三軸爲 θ,φ,h 角度則得下式

$$\frac{\partial^2 S_x}{\partial t^2}=u^2\left(\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S_x}{\partial z^2}\right) \tag{15}$$

同例得 $$\frac{\partial^2 S_y}{\partial t^2}=u^2\left(\frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S_y}{\partial z^2}\right) \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 S_z}{\partial t^2}=u^2\left(\frac{\partial^2 S_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S_z}{\partial z^2}\right) \tag{17}$$

於是得波動力學基本方程式〔66〕如 §45 所算若在光波則 u 爲光速而書爲 c

$$\Delta\psi=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad (66)$$

§54 引出量子力學基本方程式

易方陣交綜關係爲向量之旋轉前巳說之異於交錯關係之用 q 爲方陣元者交綜關係用 p 爲方陣元 q 爲坐標 p 爲動量

卐方陣有八卦曰屯蒙鼎革噬嗑賁井困而卍方陣有八卦曰蹇解睽家人旅豐節渙用河圖之數(§30)乃如下值

屯 $=p_{47}$	鼎 $=p_{63}$	噬嗑 $=p_{43}$	井 $=p_{67}$
蒙 $=p_{78}$	革 $=p_{32}$	賁 $=p_{38}$	困 $=p_{72}$
蹇 $=p_{87}$	睽 $=p_{23}$	旅 $=p_{83}$	節 $=p_{27}$
解 $=p_{74}$	家人 $=p_{36}$	豐 $=p_{34}$	渙 $=p_{76}$

由易方陣之變方陣(§23 圖 15)乃有下值

屯 $=p_{47}$	鼎 $=p_{63}$	噬嗑 $=p_{43}$	井 $=p_{67}$
蒙 $=p_{74}$	革 $=p_{26}$	賁 $=p_{34}$	困 $=p_{76}$
蹇 $=p_{87}$	睽 $=p_{23}$	旅 $=p_{83}$	節 $=p_{27}$
解 $=p_{78}$	家人 $=p_{32}$	豐 $=p_{38}$	渙 $=p_{72}$

易方陣元足指數之第一字爲內卦第二字爲外卦命內卦爲向量 A 之分向外卦爲坐標系之分向之倒數則向量 A 爲坐標之涵數而形成部分導誘數河圖之數中五爲零由是

命 $x=4,\ y=3,\ z=2,\ x'=6,\ y'=7,\ z'=8$

得

$$
\left.\begin{aligned}
\text{屯}-\text{蒙} &= p_{47}-p_{74}=\frac{\partial A_x}{\partial y'}-\frac{\partial A_{y'}}{\partial x}=i\,\mathrm{curl}_z A\\
\text{鼎}-\text{革} &= p_{63}-p_{36}=\frac{\partial A_{x'}}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x'}=-i\,\mathrm{curl}_z A\\
\text{噬嗑}-\text{賁} &= p_{43}-p_{34}=\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}=\mathrm{curl}_z A\\
\text{井}-\text{困} &= p_{67}-p_{76}=\frac{\partial A_{x'}}{\partial y'}-\frac{\partial A_{y'}}{\partial x'}=-\mathrm{curl}_z A
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(18)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\text{蹇}-\text{解} &= p_{87}-p_{78}=\frac{\partial A_{z'}}{\partial y'}-\frac{\partial A_{y'}}{\partial z'}=-\mathrm{curl}_x A\\
\text{睽}-\text{家人} &= p_{23}-p_{32}=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=\mathrm{curl}_x A\\
\text{旅}-\text{豐} &= p_{83}-p_{38}=\frac{\partial A_{z'}}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z'}=-i\,\mathrm{curl}_x A\\
\text{節}-\text{渙} &= p_{27}-p_{72}=\frac{\partial A_z}{\partial y'}-\frac{\partial A_{y'}}{\partial z}=i\,\mathrm{curl}_x A
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(19)
$$

命　　卐方陣 $=H_n$　　卍方陣 $=H_m$

則　$$H_n=\mathrm{curl}_z A+i\,\mathrm{curl}_z A-\mathrm{curl}_z A-i\,\mathrm{curl}_z A\cdots\cdots[72]_a$$

$$H_m=\mathrm{curl}_x A+i\,\mathrm{curl}_x A-\mathrm{curl}_x A-i\,\mathrm{curl}_x A\cdots\cdots[72]_b$$

因 $+1,+i,-1,-i$ 爲四象卽四度互交直角故得以 A,B,C,D 易之此卽空時電磁四向量之互交直角(§48 圖 31)故 $B=iA$, $C=-A$, $D=-iA$ 乃有下式

$$H_n=\mathrm{curl}_z A+\mathrm{curl}_z B+\mathrm{curl}_z C+\mathrm{curl}_z D\cdots\cdots[73]_a$$

$$H_m=\mathrm{curl}_x A+\mathrm{curl}_x B+\mathrm{curl}_x C+\mathrm{curl}_x D\cdots\cdots[73]_b$$

由是 H_n 與 H_m 均爲四度之彎曲愛因斯坦普通相對論證物質爲四度彎

曲由易之義則四度之合等於第五度(§48 圖 30)而第五度者其本質爲彎曲此將俟於後論故 H_n 與 H_m 遞相爲四度之合與第五度

第一第二光波方陣皆由卐卍兩方陣之相合而成故以下式作之

$$H_n-H_m=h\nu_{nm}\cdots\cdots\text{〔39〕}_a$$

$$H_m-H_n=h\nu_{mn}\cdots\cdots\text{〔39〕}_b$$

上式爲量子力學基本方程式因 $H_n=\frac{1}{2}$, $H_m=-\frac{1}{2}$(§49)故 $h\nu_{nm}$ 與 $h\nu_{mn}$ 皆等於一量子之值

波耳(Bohr) 第二定律謂電子由甲軌道躍至乙軌道卽是由甲狀態變至乙狀態而有中間狀態是爲放光其公式卽〔39〕式

從易方陣之義一切光波量子電子均成於卐卍兩方陣量子在第四度爲光波在三度中爲電子而量子成於卐卍之左右旋亦表之以 H_n 與 H_m 此視波耳電子在軌道甲乙狀態之說範圍廣大而作式勿異

§55 博郎克之作用量子

博郎克者量子論之始創也若有能力爲常數之面其能力值所可能者分此狀態空間爲若干區 (the state space) 在週期體系僅用一坐標分向 q 與相應之動量分向 p 決定之由是狀態空間爲一平面而所可能之能力常數區此爲若干域其面積相等而記之以 h 於是能力 E_n 之面積閉合於曲線者等於 nh 而 n 爲整數故得爲下式

$$\int dpdq=\int pdq=nh\cdots\cdots\text{〔74〕}$$

上式 h 爲博郎克常數其值由實驗而知略爲 6.55×10^{-27}erg-second 而

h 等於能力與時間之乘謂之作用

$$m\dot{x}dx = m\dot{x}^2dt \quad \text{〔75〕}_a$$

即

$$pdq = Et \quad \text{〔75〕}$$

牛頓(Newton) 之第二定義曰動量者質量之與速度乘也

Definitio II: Quantitas motus est mensura ejusdem, orta ex velocitate et quantitate materiae conjunctim.

牛頓之第二定律曰動量之變比例於所施之力而取其向於力之所施

Lex II: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur.

故有

$$p_k = m\dot{q}_k \quad (20)$$

$$\dot{p}_k = K_k = \frac{-\partial E_{pot}}{\partial q_k} \quad (21)$$

上式 K 謂之力而導誘於勢能 E_{pot} 勢能者 q_k 之函數而動能爲下式

$$E_{kin} = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \quad (22)$$

全能者爲 q_k 與 p_k 之涵數而稱之曰哈密爾登涵數 H (Hamilton's function)

$$\left.\begin{aligned} &H(q,p) = E_{kin} + E_{pot} \\ &\frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial E_{kin}}{\partial p_k} = \frac{p_k}{m} \end{aligned}\right\} \quad \text{〔76〕}$$

由是得§38〔40〕$_c$ 式

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \text{〔40〕}_c$$

在任意坐標系以動能爲 q 與 $\dot{q}$ 之涵數則得動量之公式如次

$$p_k=\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}} \quad \cdots\cdots (23)$$

由〔40〕$_c$ 式則見與〔75〕式相爲一致

易方陣之元內卦爲向量 A 之分向可視之爲能力 H 之向量分向外卦爲坐標系分向之倒數可視之爲 q_k 之倒數於是由〔40〕$_c$ 式而得 $\dot{p}_k$ 故交綜關係用 p 爲方陣元其所以爲 $\dot{p}$ 者因交綜關係爲向量之旋轉是以有變也

§56　六㸚之解

卦三畫何也曰空間有三度也重卦則六㸚何也曰空間三度時間三度合之則爲四度體系蓋時間三度合一而爲第四度也是故六㸚爲相對論之義而上下卦爲交錯量(§48 圖 29)

六㸚以迎陰陽何謂也曰交錯兩卦此㸚之陰彼㸚之陽六㸚之卦爲四度體系兩卦交錯則遞相爲四度之合與第五度是亦交錯量也而爲超相對論之義(§48 圖 30)

交錯兩卦共十二㸚而成五度體系者空間三度時間三度合而爲之四而與之爲交錯之卦則配空間者三配時間者三凡有六度合而爲之第五度也(§48 圖 31)

易方陣之元論交錯關係則用 q 論交綜關係則用 p 若用 H 爲方陣元則爲 q 與 p 之涵數而卽哈密爾登之涵數 $H\ (q,p)$ 於是六㸚之卦代表能力而用下式

$$H_{\mu\nu}=\varphi(q_x,q_y,q_z,p_x,p_y,p_z) \qquad \mu,\nu=1,2,3,4,6,7,8,9 \cdots\cdots〔77〕$$

由§27〔18〕式比較上式 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 為 q_x,q_y,q_z 而 $\delta_4,\delta_5,\delta_6$ 為 p_x,p_y,p_z 是為六恙

六十四卦方陣之元既為 H 又得以 q 或 p 為之元者因 q 與 p 為交錯量也如前所論 S_x,S_y,S_z 為空間三度則 T_y,T_y,T_z 合一而為第四度反之 T_x,T_y,T_z 為空間三度則 S_x,S_y,S_z 合一而為第四度(§48 圖 29)第四度者在空間無跡是以為 0 蓋其與三度中一切方向均垂直是惟可為 0 也 q 與 p 猶 S 與 T 故得用其一焉

H_n 與 H_m 俱四度體系而分別代表卐卍兩方陣此兩方陣皆有八卦然六恙之卦亦四度體系故 H_n 與 H_m 亦代表太極圖黑中之白點與白中之黑點斯卽六十四卦之每交錯兩卦(§36)

卐卍俱四度體系而在§52 圖 47 與圖 49 則卐為 A 空間卍為 B 空間是皆三度何也曰四度體系者三度與第四度也是已為交錯量故圖47之II四正之 2 移於空間向量圖 49 之 II 亦如之光波為第四度之散佈故空間向量為 0 卐有八卦弃其二在空間向量則留在時間向量者三度耳卍有八卦弃其二在空間向量則留在時間向量者亦三度耳時間向量為第四度四度體系能容三度體系者二故在光波方陣卐卍俱將化為三度俾得能容

量子在第四度為光波在三度中為電子 H_n,H_m 皆四度體系故由〔39〕$_a$〔39〕$_b$ 兩式放射光波 $h\nu_{nm}$ 與吸收光波 $h\nu_{mn}$ 皆五度體系也惟因光波必在於第四度故 H_n, H_m 皆化三度而所謂量子者與光波共名其本為五度體系者亦以為四度體系 H_n, H_m 雖化三度亦自為交錯量而交錯

量惟四度則兼容之若在空間僅能容三度體系者一故量子在空間爲電子而電子則必爲半量子

若有 A,B 爲交錯量則 $A^*=B$ 而 $B^*=A$

命 $$A_\mu A_\nu=A_{\mu\nu} \quad\cdots\cdots(24)$$

則 $$A_\mu \overset{*}{B_\nu}=A_{\mu\nu} \quad\cdots\cdots(25)$$

若 $k_1,k_2,k_3\cdots$ 爲整數之順序排列 ($k_n\neq k_m$ 若 $n\neq m$)

$$p=\{p_{nm}\},\quad p_{nm}=\begin{cases}1 \text{ 當 } m=k_n\\ 0 \text{ 當 } m\neq k_n\end{cases} \quad\cdots\cdots(26)$$

上式作爲方陣凡所謂換置方陣者兩足指數之互易也(the transposed matrix)以∧爲記號

$$\hat{P}_{nm}=P_{mn} \quad 故 \quad \hat{P}_{nm}=\begin{cases}1 \text{ 當 } n=k_m\\ 0 \text{ 當 } n\neq k_m\end{cases} \quad\cdots\cdots(27)$$

由方陣乘法

$$P\hat{P}=\left\{\sum_k P_{nk}\hat{P}_{km}\right\}=\{\delta_{nm}\}=1 \quad\cdots\cdots(28)$$

故 $$\hat{P}=P^{-1} \quad\cdots\cdots[78]$$

凡足指數互易而爲交錯量者謂之黑厤脫方陣（§28）易方陣之變方陣（§23圖15）爲黑厤脫方陣蓋其足指數互易則爲交綜之卦而交綜關係猶交錯量也於是

$$B^*=B^{-1} \quad\cdots\cdots(29)$$

由(25)式則 $$A_\mu B_\nu^{-1}=A_{\mu\nu} \quad\cdots\cdots(30)$$

內外卦爲交錯量內卦爲向量 A 之分向外卦爲坐標系分向之倒數於是

$\gamma_{\mu\nu}$ 猶之非交錯兩向量之乘如(24)式之所示

由〔39〕式以視(24)式則似違礙而在量子算法爲可有也由太極圖方程式 $\dot{q}=[q,H]$ (§37〔40〕式)及〔40〕$_c$ 式則得下式

$$[f,p]=\frac{\partial f}{\partial q},\quad [q,f]=\frac{\partial f}{\partial p} \qquad \text{〔79〕}$$

此式可證若對於 f_1 與 f_2 兩涵數爲準確則對於 $f_1 \cdot f_2$ 者 f_1+f_2 亦復爲準確

第十一章

超相對論說明空時電磁基本關係

§57　空時與電磁兩皆四度體系

相對論說明空時之關係超相對論應說明空時電磁之關係§48 圖 30 為陰陽兩四度體而代表八卦四陽為四度則四陰合一為第五度反之四陰為四度則四陽合一為第五度四度者空間為三時間為第四而電磁為第五度若以電作三度與磁為四則電磁之關係當與空時之關係相同茲作四行四列方陣此十六數值為四度張量之十六分向蓋四度坐標之變易猶之乎其向量分向之兩兩相乘

$$K=\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots [80]$$

上式若反稱方陣則 $K_{\mu\nu}=-K_{\nu\mu}$ 而 $K_{\mu\mu}=0$ 故反稱方陣代表張量者以六值定之蓋四者無值而十二兩兩為對

三度球體有三軸相交直角亦有三面相交直角四度球體則有六'軸平面'相交直角反稱張量之六值視之為四度球體之六'軸平面'若用三度球

體'軸向量'之三分向以反稱張量六值中足指數不涵 4 者當之而用三度球體'極向量'之三分向以 i 乘之作為反稱張量六值中足指數涵有 4 者當之蓋 4 以代表第四度為時間線而 1,2,3 代表空間三度命 A 為三度球體之 '軸向量' B 為'極向量'乃有下式

$$\left.\begin{array}{ll} A_x=K_{23}=-K_{32} & iB_x=K_{41}=-K_{14} \\ A_y=K_{31}=-K_{13} & iB_y=K_{42}=-K_{24} \\ A_z=K_{12}=-K_{21} & iB_z=K_{43}=-K_{34} \end{array}\right\} \cdots\cdots(1)$$

四度張量之向量散佈示如下式

$$\psi_1=\frac{\partial K_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial K_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial K_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial K_{14}}{\partial x_4} \cdots\cdots[81]$$

空間向量 ψ_s 之三分向為 ψ_x,ψ_y,ψ_z 而 $\psi_x=\psi_1$ 時間向量 $\psi_\tau=\psi_4$ 而 $\tau=ict$ 故 $\psi_\tau=i\psi_t$

故

$$\left.\begin{array}{l} \psi_x=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \psi_t=\dfrac{\partial B_x}{\partial x}+\dfrac{\partial B_y}{\partial y}+\dfrac{\partial B_z}{\partial z} \end{array}\right\} \cdots\cdots(2)$$

由是

$$\left.\begin{array}{l} \psi_s=\mathrm{curl}\ A-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \psi_t=\mathrm{div}\ B \end{array}\right\} \cdots\cdots[82]$$

凡向量之旋轉以下式示之

$$K_{\mu\nu}=\frac{\partial G_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial G_\mu}{\partial x_\nu} \cdots\cdots[83]$$

上式 $K_{\mu\nu}$ 亦為四度張量之分向上式偏微分商依坐標三軸 μ,ν,ρ 乃有下式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}&=\frac{\partial^2 G_\nu}{\partial x_\mu \partial x_\varrho}-\frac{\partial^2 G_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\varrho}\\ \frac{\partial K_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu}&=\frac{\partial^2 G_\varrho}{\partial x_\nu \partial x_\mu}-\frac{\partial^2 G_\nu}{\partial x_\varrho \partial x_\mu}\\ \frac{\partial K_{\varrho\mu}}{\partial x_\nu}&=\frac{\partial^2 G_\mu}{\partial x_\varrho \partial x_\nu}-\frac{\partial^2 G_\varrho}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(3)$$

三式相加得

$$\frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}+\frac{\partial K_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial K_{\varrho\mu}}{\partial x_\nu}=0 \cdots\cdots[84]$$

任一張量有此關係其義爲向量之旋轉由上式以 1,2,3,4 代入 μ,ν,ϱ 得下式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}&=0\\ -\frac{i}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}-i\frac{\partial B_z}{\partial y}+i\frac{\partial B_y}{\partial z}&=0\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(4)$$

於是得

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{curl}\ B&=-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}\\ \mathrm{div}\ A&=0\end{aligned}\right\} \cdots\cdots[85]$$

上式與 §33[33]式中之二者相符而 H 爲磁 F 爲電在此 A 爲空間 B 爲時間

[33]式其餘兩式 ϱ 爲電密 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 爲電流密度 ϱv 爲對流電密凡電量無關動靜故無變於羅倫茲式 $\beta=1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 而電密不然因容量 V 值隨羅倫茲式而變者也動於 x 之向者則有縮短焉而爲 x/β 而 y 與 z 無變故 V 非不變者

而 $$\beta V = 不變值 \quad\cdots\cdots(5)$$

不變值者不隨坐標而變命 Q＝電量，ϱ'＝電密

則 $$\frac{Q}{\beta V}=\frac{\varrho'}{\beta}=不變值 \quad\cdots\cdots(6)$$

上式 ϱ' 為尋常電密而以 ϱ 為希維雪特電密由 §34〔34〕式及〔34〕$_a$ 式得下式

$$\varrho = 4\pi\varrho' \quad\cdots\cdots(7)$$

於是 $$\frac{\varrho}{\beta}=不變值 \quad\cdots\cdots(8)$$

四度中速度分向為 $\beta v_x, \beta v_y, \beta v_z, \beta ic$ 以不變值 $\frac{1}{c}\frac{\varrho}{\beta}$ 乘之命曰 $\xi_x, \xi_y, \xi_z, i\xi_t$

則得下式

$$\xi_x=\frac{1}{c}\varrho v_x,\ \xi_y=\frac{1}{c}\varrho v_y,\ \xi_z=\frac{1}{c}\varrho v_z,\ \xi_t=\varrho \quad\cdots\cdots(9)$$

由〔33〕式得下式

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{curl} H &= \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}+\xi_s\\ \operatorname{div} F &= \xi_t\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots〔86〕$$

上式為符合〔33〕式中之兩式 ξ_s 為空間向量其分向為 ξ_x, ξ_y, ξ_z 而 ξ_t 為時間向量於是

電磁有四式
$$\left.\begin{aligned}&1.\ \operatorname{curl} F = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\\ &2.\ \operatorname{div} H = 0\\ &3.\ \operatorname{curl} H = \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}+\xi_s\\ &4.\ \operatorname{div} F = \xi_t\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots〔87〕$$

空時有四式

$$\left.\begin{aligned}&1.\ \text{curl}\ B = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}\\&2.\ \text{div}\ A = 0\\&3.\ \text{curl}\ A = \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}+\psi_s\\&4.\ \text{div}\ B = \psi_t\end{aligned}\right\}\cdots\cdots〔88〕$$

上示電磁與空時有相同之關係 ψ_t 與 ξ_t 均爲四度張量之向量散佈而示一四度張量之時間向量由〔87〕〔88〕兩式之符同可知電磁場量之分向亦爲四度反稱張量之分向於是亦可作四行四列之方陣而稱之曰電磁場之張量(the electromagnetic field tensor)如下式

$$J=\begin{vmatrix}J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14}\\J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24}\\J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34}\\J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44}\end{vmatrix}\cdots\cdots〔89〕$$

於是電磁向量如下式

$$\left.\begin{aligned}&H_x=J_{23}=-J_{32} \qquad iF_x=J_{41}=-J_{14}\\&H_y=J_{31}=-J_{13} \qquad iF_y=J_{42}=-J_{24}\\&H_z=J_{12}=-J_{21} \qquad iF_z=J_{43}=-J_{34}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(10)$$

依上同算亦得〔87〕式

§58 物質張量

物質之靜質量 m_0 猶電量 Q 不隨坐標而變然動質量 m 則等於 βm_0

命 μ 爲物質密度

$$\frac{m}{\beta^2 V}=\frac{\mu}{\beta^2}=\text{不變值} \quad\cdots\cdots(11)$$

因 $$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2 \quad\cdots\cdots[90]$$

而 $$v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \quad\cdots\cdots(12)$$

故 $$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=v^2-c^2,\qquad \frac{\partial s}{\partial t}=i\sqrt{c^2-v^2} \quad\cdots\cdots(13)$$

$$\frac{\partial t}{\partial s}=-\frac{i}{\sqrt{c^2-v^2}} \quad\cdots\cdots(14)$$

命 ds 與 dx 所成角度爲 θ_x 與 $dy,dz,d\tau$ 所成角度爲 $\theta_y,\theta_z,\theta_\tau$ 則得下式

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_x&=\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s}=\frac{-iv_x}{\sqrt{c^2-v^2}}\\ \cos\theta_\tau&=\frac{\partial \tau}{\partial s}=\frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s}=\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(15)$$

於是以不變值乘 $\cos^2\theta_{\mu\nu}$　$\mu,\nu=1,2,3,4$

作四度張量如下式

$$\left.\begin{aligned}T_{11}&=-\frac{\mu v_x^2}{c^2}, & T_{12}&=T_{21}=-\frac{\mu v_x v_y}{c^2}\\ T_{44}&=\mu, & T_{14}&=T_{41}=-\frac{i\mu v}{c}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots[91]$$

$$T=\begin{vmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34}\\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44}\end{vmatrix} \quad\cdots\cdots[92]$$

上式稱之曰物質張量而爲對稱張量其純時間分向 T_{44} 爲物質密度其空

時分向 T_{14},T_{24},T_{34}爲動量密度若 v 比於 c 爲甚小則純空間分向 T_{11},T_{22},T_{33} 爲次階可略之微數故得爲下式

$$T_{11}+T_{22}+T_{33}+T_{44}=\mu \quad \text{〔93〕}$$

§59 五度宇宙張量

易方陣爲五度之義而其方陣八行八列此陰陽兩四度體系也如 §48 圖 30 示之余今徑以五度作之謂之曰五度宇宙張量

$$\Gamma=\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} & \gamma_{15} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} & \gamma_{25} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{35} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} & \gamma_{45} \\ \gamma_{51} & \gamma_{52} & \gamma_{53} & \gamma_{54} & \gamma_{55} \end{vmatrix} \quad \text{〔94〕}$$

上式二十五數値爲五度張量二十五分向而爲反稱張量故五者無値 $\gamma_{\mu\mu}=0$ 二十者兩兩而爲對 $\gamma_{\mu\nu}=-\gamma_{\nu\mu}$, $\mu,\nu=1,2,3,4,5$ 凡十値此五度球體有十平面互交爲直角也

命 A 爲空間向量 B 爲時間向量 C 爲第五度向量故 $B\times i$ 而 $C\times i\times i$ 作如下式

$$\left.\begin{array}{lll} A_x=\gamma_{23}=-\gamma_{32} & iB_x=\gamma_{41}=-\gamma_{14} & -C_x=\gamma_{51}=-\gamma_{15} \\ A_y=\gamma_{31}=-\gamma_{13} & iB_y=\gamma_{42}=-\gamma_{24} & -C_y=\gamma_{52}=-\gamma_{25} \\ A_z=\gamma_{12}=-\gamma_{21} & iB_z=\gamma_{43}=-\gamma_{34} & -C_z=\gamma_{53}=-\gamma_{35} \\ & -iD=-C_\tau=\gamma_{54}=-\gamma_{45} & \end{array}\right\} \quad (16)$$

五度張量之向量散佈式如下示

$$\varphi_1=\frac{\partial\gamma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\gamma_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial\gamma_{14}}{\partial x_4}+\frac{\partial\gamma_{15}}{\partial x_5}\cdots\cdots(95)$$

φ 之空間分向曰 φ_s 其三分向為 $\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z$

φ 之時間分向曰 φ_τ 而 $\tau=ict$ 故 $\varphi_\tau=i\varphi_t$

φ 之第五度分向曰 $\varphi_{\sigma'}$ 而 $\varphi_{\sigma'}=-\varphi_\sigma$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_x&=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\partial C_x}{\partial\sigma}\\
\varphi_t&=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}+\frac{\partial D}{\partial\sigma}\\
\varphi_\sigma&=\frac{\partial C_x}{\partial x}+\frac{\partial C_y}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}+\frac{i\partial D}{\partial\tau}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

故得

$$\left.\begin{aligned}
&1.\quad \varphi_s=\operatorname{curl}A-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial C}{\partial\sigma}\\
&2.\quad \varphi_t=\operatorname{div}B+\frac{\partial D}{\partial\sigma}\\
&3.\quad \varphi_\sigma=\operatorname{div}C+\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(96)$$

由§57(84)式以 1,2,3,4,5 代入 μ,ν,ρ 則得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}&=0\\
\frac{\partial A_s}{\partial\tau}-i\frac{\partial B_y}{\partial x}+i\frac{\partial B_x}{\partial y}&=0\\
\frac{\partial A_z}{\partial\sigma}+\frac{\partial C_y}{\partial x}-\frac{\partial C_x}{\partial y}&=0\\
-i\frac{\partial B_y}{\partial\sigma}+\frac{\partial C_\tau}{\partial y}-\frac{\partial C_y}{\partial\tau}&=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(18)$$

於是爲下式

$$\left.\begin{aligned}&1.\quad \operatorname{curl} B=-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}\\&2.\quad \operatorname{curl} C=-\frac{\partial A}{\partial \sigma}\\&3.\quad \operatorname{curl} D=\frac{\partial B}{\partial \sigma}\\&4,\quad \operatorname{div} A=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots[97]$$

以〔96〕〔97〕兩式比較〔87〕〔88〕兩式則 φ_t 卽 ψ_t 而增 $\frac{\partial D}{\partial\sigma}$ 而 φ_σ 卽 ξ_t 而增 $\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}$ 蓋 ψ_t 與 ξ_t 均散佈於三度而 φ_t 與 φ_σ 則散佈於四度若以 Div 爲四度中散佈記號乃如下式

$$\left.\begin{aligned}\varphi_t&=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}+\frac{\partial B_\sigma}{\partial \sigma}\\\varphi_\sigma&=\frac{\partial C_x}{\partial x}+\frac{\partial C_y}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}+\frac{\partial C_\tau}{\partial \tau}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

蓋 $iD=C_\tau$ 而磁線者三陽 C 之時間線也 ∂D 乃可改書爲 ∂B_σ

$$\left.\begin{aligned}\varphi_t&=\operatorname{Div} B=\mu\\\varphi_\sigma&=\operatorname{Div} C=\varrho\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots[98]$$

上式 μ 爲物質密度 ϱ 爲電密

§60　空時電磁之綜合關係

由 §48 圖 31 A,B,C,D 爲空時電磁而電時爲合空磁爲合故〔97〕式之 2,3 兩式亦卽〔87〕式之 1,3 兩式而由電磁與空時之對稱應有〔87〕式之1,3兩式相似之空時關係

即

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{curl} B &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \\ \operatorname{curl} A &= \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(99)$$

上式卽〔96〕〔97〕兩式之 1 而由〔96〕之 1 並得下式

$$\varphi_s = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \cdots\cdots(100)$$

由電時爲合之原則得下式

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \cdots\cdots(101)$$

由上式及〔99〕〔100〕兩式得下式

$$\varphi_s = \operatorname{curl} A \cdots\cdots(102)$$

於是得

$$\left.\begin{aligned} \psi_s &= \operatorname{curl} A \\ \xi_s &= \operatorname{curl} H \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(102_a)$$

由§33〔33〕式及〔87〕式得下式

$$\xi_s = \frac{1}{c}\varrho v \cdots\cdots(103)$$

上式 ϱv 爲電量之對流密度 v 爲電速度故 ξ_s 爲 curl H 同例有下式

$$\psi_s = \frac{1}{c}\mu v \cdots\cdots(104)$$

上式 μv 爲質量之對流密度而 v 爲質點之速度故 ψ_s 爲 curl A

由〔97〕式之 4 式 div $A=0$ 依電磁與空時之對稱應有下式

$$\operatorname{div} H = 0 \cdots\cdots(20)$$

於是五度宇宙張量有空時電磁之散佈公式如下示

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} A &= 0 \\ \operatorname{div} B &= \varphi_t - \frac{\partial D}{\partial \sigma} \\ \operatorname{div} C &= \varphi_\sigma - \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} \\ \operatorname{div} D &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots〔105〕$$

上式 A 為空間向量 B 為時間向量 C 為電力場量 D 為磁力場量

有空時電磁之向量旋轉之公式如下示

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{curl} A &= \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \\ \operatorname{curl} B &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \\ \operatorname{curl} C &= -\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} \\ \operatorname{curl} D &= \frac{1}{c}\frac{\partial C}{\partial t} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots〔106〕$$

有五度張量之向量分向如下示

$$\left.\begin{aligned} \varphi_s &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} \\ \varphi_t &= \operatorname{div} B + \frac{\partial D}{\partial \sigma} \\ \varphi_\sigma &= \operatorname{div} C + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots〔107〕$$

空時對稱為相對論空時電磁之對稱為超相對論上列〔105〕〔106〕〔107〕三式為空時電磁之基本關係由是有重要之定義二

I　空時之相對電磁之相對而空時與電磁復相對故第五度為電為磁

斯爲超相對論

II　空磁之爲合電時之爲合離傍坤坎傍乾是故水火不相射

§61　引出麥克斯威爾電磁波公式

麥克斯威爾電磁波方程式 (Maxwell 1864) 卽光波方程式也一切光波皆電磁波赫芝造成電力射線(Heinich Hertz 1891)能與光波同様反射屈折空中傳佈與光同速其所造電波波長達數密達由此經熱線紅外線以至可見光線成一系統而可見光線之波長小至百萬分之一密達此系統之兩端一爲赫芝所造無線電波其波長以基羅密達計諾運 (Nauen) 作之波長爲十二基羅密達一爲欒琴線 (Röntgen 1895) 卽 X 光線更短則伽馬線 (γ-rays) 伽馬外線 (ultra-γ-rays) 卽宇宙線(cosmic radiation) 罔不畢同

先是法雷台 (Faraday 1821) 以實驗而知電磁之關係若電流在線其周有磁力若有磁極行於直線其周之圈線有電流此關係既明十年之後而電動機作(electric motor) 凡電動機發電機本此原理而電磁之於世其利用乃大

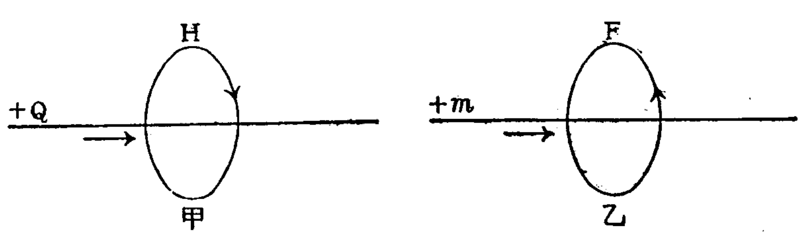


圖 54　電磁之關係

上圖Q爲電量m爲磁極F爲電力場量H爲磁力場量上圖所示$+Q,+m$方向相同而F,H方向相反此即§60〔106〕式之C與D兩式C爲電向量D爲磁向量以F,H易書爲下式

$$\left.\begin{aligned}\text{curl } F &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\\ \text{curl } H &= \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots〔108〕$$

於是

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial F_z}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial z} \cdots\cdots〔108〕_a$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial x} \cdots\cdots〔108〕_b$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial F_y}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial y} \cdots\cdots〔108〕_c$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial F_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \cdots\cdots〔108〕_d$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial F_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \cdots\cdots〔108〕_e$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial F_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \cdots\cdots〔108〕_f$$

〔108〕$_d$式之時間微分商爲下式

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 F_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H_z}{\partial y\partial t} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z\partial t} \cdots\cdots(21)$$

〔108〕$_b$式之z度微分商爲下式

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial^2 H_y}{\partial z\partial t} = -\frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x\partial z} \cdots\cdots(22)$$

〔108〕$_e$式之y度微分商爲下式

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial t} = -\frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} \cdots\cdots (23)$$

以(22)(23)兩式代入(21)式得下式

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 F_x}{\partial t^2} = \frac{c}{\mu}\left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right) \cdots\cdots (24)$$

故 $$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 F_x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z}\right) \cdots (25)$$

上式 ε 爲誘電容(dielectric capacity) μ 爲透磁率 (permeability) ε 與 μ 皆常數因媒質而異在真空則皆 1 如(25)式者同法算之共有六式

若有長方立體形置於一坐標系之任何位置有電力場量在其旁長方立體有六面電力線之進於此者在前底左三面而離於此之後上右三面無自由電荷在此形體則進入之力線與離去者數乃相同進入爲正離去爲負則總和爲零

命 F_x, F_x' 爲電力場量之 x 分向在此形體左右兩面之電力於是有 $F_x dydz$ 之力線進於左而有 $F_x' dydz$ 之力線離於右 F_y, F_y' 與 F_z, F_z' 之在其他四面亦然故有下式

$$(F_x - F_x')\,dydz + (F_y - F_y')\,dzdx + (F_z - F_z')\,dxdy = 0 \cdots (26)$$

於是 $$F_x' = F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x}dx,\ F_y' = F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y}dy,\ F'_z = F_z + \frac{\partial F_z}{\partial z}dz \cdots (27)$$

以(27)式代入(26)式有下式

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dxdydz = 0 \cdots\cdots (28)$$

今 $dxdydz$ 爲長方立體之容積此容積非等於零故上式運算子

$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$ 乃等於零於是有下式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)=0 \quad\cdots\cdots\cdots(29)$$

上式爲(25)式右邊第二項之値故書(25)式同型之六列方程式如次

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 F_x}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\\
\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 F_y}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}\\
\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 F_z}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}\\
\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}\\
\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\\
\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H^z}{\partial z^2}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots[109]$$

上式爲麥克斯威爾電磁波方程式在眞空則 $\mu\varepsilon=1$ 斯爲波動力學基本方程式(§53[66]式) 而波速 u 易之爲光速 c 上列六式似電磁兩波分立然因交互求出故非獨立

第十二章

五行大義說相對論

§62 五行相生相尅之義

易說本五度古者五度異名曰金水木火土故五行者五度之謂也五行大義在於相生相尅伏義八卦著其相尅之序文王八卦著其相生之序示之下圖

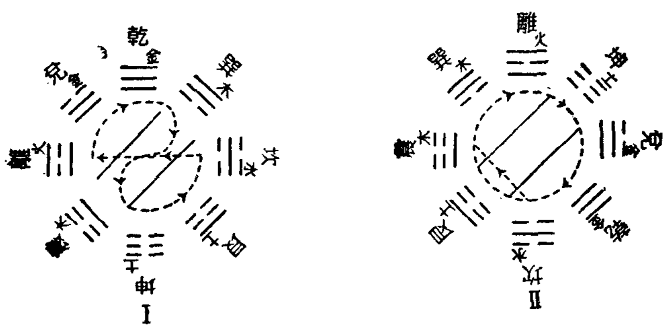


圖 55 I 伏義八卦五行相尅之序 II 文王八卦五行相生之序

上圖伏義八卦火尅金金尅木木尅土土尅水水尅火其序離兌乾巽震坤艮坎離蓋離爲火兌乾皆金巽震皆木坤艮皆土坎爲水文王八卦木生火火生土土生金金生水水生木其序震巽離坤兌乾坎艮震水非土不生木故坎震之間艮居之其實三合之義子移在亥而亥爲艮故艮亦作水其如是坎艮皆水生震木焉

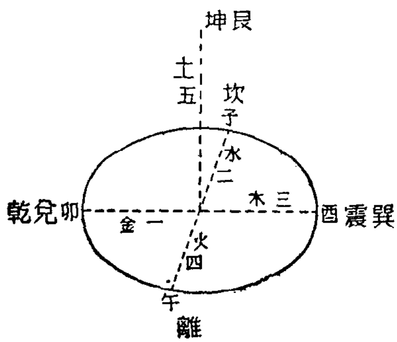


圖 56 五行爲五度

五行爲五度者金爲一水爲二木爲三火爲四土爲五如圖56示之以金水木火爲一二三四在圓平面相交直角而土爲五垂直於中此自然之序也然非五度本相若其本相則任何一度與其他四度皆爲垂直

何謂生尅之義曰相生者差一直角相尅者差二直角

金生水	$1\to2$	水生木	$2\to3$
木生火	$3\to4$	火生土	$4\to5$
土生金	$5\to6$		

五之週期六乃爲一故一六皆金

金尅木	$1\to3$	木尅土	$3\to5$
土尅水	$5\to7$	水尅火	$7\to9$
火尅金	$9\to11$		

五之週期七爲二九爲四而六與十一皆爲一故伏羲八卦差二之數文王八卦差一之數

§63 交錯量之義

何謂差一差二之數曰差一者非交錯量也差二者交錯量也斯爲河洛之數若有 α,β 二向量互交直角而同在三度空間之中則同爲空間向量其

性質相類是曰非交錯量如圖57之 I 所示

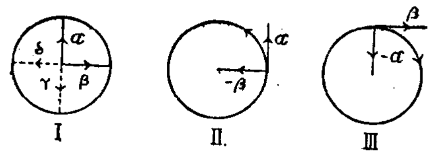


圖 57　卐卍化圖

若有 α,β 二向量互交直角而一者在三度爲空間向量一者在第四度爲時間向量其性質相異是曰交錯量如圖57之 II α 移在周則 β 反向乃作 $-\beta$ 圖 III β 移在周則 α 反向乃作 $-\alpha$ 夫交錯量之以其一在周此卐字之義也卐卍兩方陣(§12 圖 10)其中虛線余則益焉示其與交綜四線爲交錯量上圖 II 爲卍字 III 爲卐字四而用其一足以見其義也惟 II 爲左旋 III 爲右旋而前論則卐爲左旋卍爲右旋此因在周之線作之空間其旋爲反也陽左而陰右蓋卐爲陽而卍爲陰如前所論卐卍中之十字爲空間向量而四周之線爲時間向量而上圖 II,III 則以周切線爲空間向量而半徑爲時間向量是以爲反也上圖謂之卐卍化圖

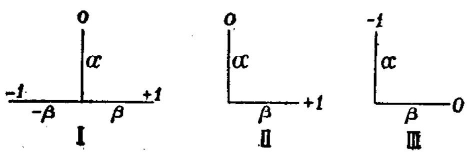


圖58　交錯量爲差二之數

圖58 I $\alpha=0$ 自 α 右旋一直角爲 $\beta=+1$ 自 α 左旋一直角爲 $-\beta=-1$ 而 $+1$ 與 -1 差兩直角此三度中所見若在四度則不能固視 α 爲 0 而 β 亦可爲 0 故右旋直角則 α 爲 0, β 爲 $+1$ 如圖 II 示之左旋直角則 β 爲 0, α 爲 -1 如圖 III 示之於是 $\alpha=-1$，$\beta=+1$ 爲交錯量 α 與 β 在三度中差一直角而四度中爲差二直角是故四度中直角爲三度中之半而三度中直角爲四度中之倍故曰交錯量者差二之數

若非交錯量爲差一之數如圖57之 I 自 α 至 β 爲一則 α 爲 0 而 β 爲

1 α之逆向曰γ與β又差一直角故β爲0而γ爲1自α計之γ乃爲2而β之逆向曰δ則爲3至α而爲4又至β爲5至γ爲6至δ爲7更至α而爲8如是逐一而增無有已時此乃謂之數量數量者限於空間三度則有之而不存於四度所謂逐一而增是相生之義也祖父己子孫謂之五代相生者僅能逐代而不能隔代祖不生己己不生孫故相生者限於差一

§64 明哥斯基相對論

明哥斯基(Minkowski 1908)在德國古倫城(Cologne)科學會演講題爲空間與時間首創時間線爲第四度之說於是物理學爲畫時代之進步今略舉其義

凡物運動速度無過於光速故四度中兩點之聯代表一四度向量者其兩點之距之平方必爲負值蓋四度向量代表一運動因此

$$\Delta r < c\Delta t \quad \text{(1)}$$

上式Δr爲空間中距離c爲光速t爲時間

$$(\Delta r)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \quad \text{(2)}$$

$$(\Delta S)^2=(\Delta r)^2-c^2(\Delta t)^2 \quad \text{(3)}$$

上式ΔS爲四度向量若一質點爲靜止則立一坐標系以四度向量爲時間線軸故Δr無存而四度中兩點之聯在三度中爲合一由此移至別坐標系以速度v'與此相對運動則有

$$(\Delta r')^2=v'^2(\Delta t')^2 \quad \text{(4)}$$

因v'不得大於c故$(\Delta S)^2$必爲負值

今有　$$\Delta r > c\Delta t \qquad (5)$$

則四度向量聯四度中之兩點者不得代表運動因過光速之速度不可有由是亦不得以之爲時間線軸而移至別坐標系若 (5) 式 Δr 單代表一長度 $(\Delta S)^2$ 乃爲正值而此四度向量惟可用爲空間線軸若向 x 則 y,z 及 t 在此兩點均同故由 (5) 式則兩點謂之同時

在 (1) (5) 兩式四度向量聯四度中之兩點者意義不同前者惟可爲時間線軸而後者惟可爲空間線軸故前者謂之時間四度向量後者謂之空間四度向量前者兩點在三度中爲合一後者兩點可爲同時

今用坐標系以時間之虛線 ict 改作實線 ct 命之曰 u 爲便利故空間三度單用 x 線如圖 59 示之

由羅倫茲轉換式 ou, ox 移爲 ou', ox'

而
$$\angle uou' = \angle xox' = \psi$$
$$\angle u'ox' = 90° - 2\psi$$

則
$$\tan\psi = i\frac{v}{c} \qquad (6)$$

於是作直角雙曲線以下式表之

$$x^2 - u^2 = \pm 1 \qquad (7)$$

x' 軸 u' 軸與兩曲線之交點至中心之長度爲新坐標系之空間與時間單位長度 (後者乘 c) 兩漸近線 (asymptotes) 爲光線之路爲下式

$$x^2 - u^2 = 0 \qquad (8)$$

若增 y 軸則兩漸近線變爲雙圓錐面更增 z 軸則變爲雙圓錐超面謂之光圓錐有前後前者代表光波之程 $t=0$ 達之於此點 (x,y,z 皆等於 0)

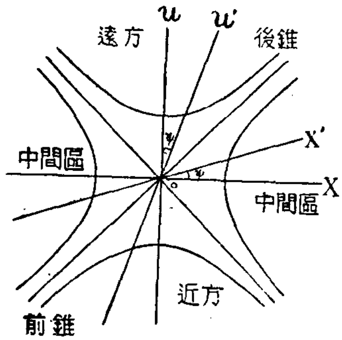


圖59 空間向量與時間向量

後者代表光波之程 $t=0$ 離開此點(x,y,z 皆等於0)光圓錐分此四度體系為三部第一圓錐在0之遠方以兩漸近線為臨界而 u 為正值四度中任何點在圓錐內可畫時間四度向量至別一點後於原點者第二圓錐在0之近方以兩漸近線為臨界而 u 為負值四度中任何點在圓錐內可畫時間四度向量至別一點前於原點者第三部分為除去兩光圓錐之餘四度中任何點在此區域可自中心畫空間四度向量至於此點故第三部諸點可與原點為同時

空間時間既為四度體系故一狀態之說明用 x,y,z,t 四值定之如圖60示之

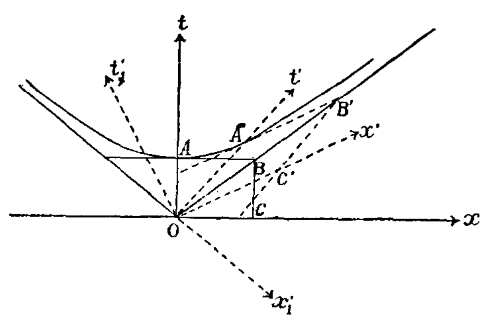


圖60 四度體系之轉變

右圖為雙曲線之 $t=0$ 部分為簡單故 y 與 z 作為不變而此曲線代表 $c^2t^2-x^2=1$ 自原點0畫 ot' 線與曲線交於 A' 在 A' 點畫切線而與漸近線交於 B' 以 OA', $A'B'$ 作兩邊成並行四邊形 $O'A'B'C'$ 於是 OC' 與 OA' 為向量 x' 與 t' 而量 $OC'=1$, $OA'=\frac{1}{c}$ 則得 $c^2t'^2-x'^2=1\ (t'>0)$

一切物理學定律以 x,y,z,t 說明者可得以 x',y',z',t' 同法說明無所

差別以 $OABC$ 正方形代表 x,y,z,t 則 $OA'B'C'$ 斜方形代表 x',y',z',t' 若一質點靜止於 o 則 ot 爲時間線若此質點沿 ox 軸以 v 速度而行則時間線乃爲斜線 ot' 若以 ot' 置於 ot 之向則質點在行者其 ox 之向移爲 ox' 故 $OABC$ 代表靜止時四度體系而 $OA'B'C'$ 代表速度 v 時四度體系設 ox_1' 垂直於 ot' 而 ot_1' 垂直於 ox' 則當 $t_1'ox_1'$ 由鈍角轉成直角時 tox 將由直角轉成銳角而等於 $t'ox'$ 今 x_1',y_1',z_1',t_1' 卽 x',y',z',t' 之四度體系故亦以 $OA'B'C'$ 代表之於是當 $OA'B'C'$ 轉成正長方形等於 $OABC$ 時而 $OABC$ 則轉爲斜方形等於 $OA'B'C'$ 此因甲動乙靜甲對乙有速度 v 亦可視爲甲靜乙動乙對甲有速度 v 由是動靜無區別 $OABC$ 與 $OA'B'C'$ 無分辨故上圖 ox' 與 ot' 爲角度者亦視爲垂直而 ox' 與 ot' 一爲空間向量一爲時間向量二者交錯量交錯量應視之爲直角

§65 量子爲五度體系

量子者成於左旋右旋兩圓卽卐卍兩形前證之矣卐卍者亦卽 H_n 與 H_m 而兩者均四度體系四度體系者其中有空間向量與時間向量空間時間爲交錯量故§63圖 57 之 II 與 III 代表 H_n 與 H_m 而得以下式作之

$$\alpha-\beta=H_n \qquad [110]_a$$

$$\beta-\alpha=H_m \qquad [110]_b$$

上式 H_n 爲左旋之圓 H_m 爲右旋之圓由§49卐等於 $+\frac{1}{2}$ 卍等於 $-\frac{1}{2}$ 由§54 卐 $=H_n$, 卍 $=H_m$ 故 α 等於 $+\frac{1}{2}$ 而 β 等於 $-\frac{1}{2}$

由是

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha=f(x,y,z), & \beta=f^*(x,y,z), \\ \beta=f(t), & \alpha=f^*(t)\end{array}\right\} \qquad [111]$$

故α與β為交錯量皆三度體系

$$\left.\begin{array}{l} H_n=f(x,y,z,t) \\ H_m=f^*(x,y,z,t) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots [112]$$

故 H_n 與 H_m 為交錯量而皆四度體系此符合於§54〔73〕$_a$式與〔73〕$_b$式

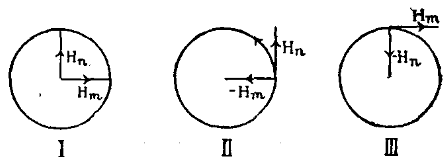


圖61 四度體系之交錯量

於是更有下圖

左圖 I H_n與H_m互交直角 II 移 H_n 在周而 H_m 變 $-H_m$ III 移 H_m在周而 H_n變 $-H_n$ 於是 II 為 $h\nu_{nm}$ 為放射光波 III 為 $h\nu_{mn}$ 為吸收光波而得§54〔39〕式

$$\left.\begin{array}{l} H_n-H_m=h\nu_{nm} \\ H_m-H_n=h\nu_{mn} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots [39]$$

上式 $H_n=\frac{1}{2}, H_m=-\frac{1}{2}$故 $h\nu_{nm}$ 等於$+1$ 而 $h\nu_{mn}$ 等於-1 此皆示一量子之值而兩者亦交錯量

$$\left.\begin{array}{l} h\nu_{nm}=f\ \ (x,y,z,t,\sigma) \\ h\nu_{mn}=f^*(x,y,z,t,\sigma) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots [113]$$

上式σ代表第五度是故量子為五度體系而 H_n 與 H_m 則皆空時四度向量與第五度向量之相為轉變

§66 卐卍化圖之解

所謂卐卍化圖者圓半徑與周切線為交錯量也(§63 圖 57)若以圓平面代表一空間則垂直於圓平面之中心者為第四度是則中心垂直線代表圓周種種切線(§51 圖 43 圖 44)由是電力場量 F 與磁力場量 H 為交錯

量如圖62示之I圓半徑爲F周切線爲H而中心垂直線亦H與周切線同II圓半徑爲H周切線爲F而中心垂直線亦F與周切線同H爲左旋F爲右旋電力場量與磁力場量爲交錯量也

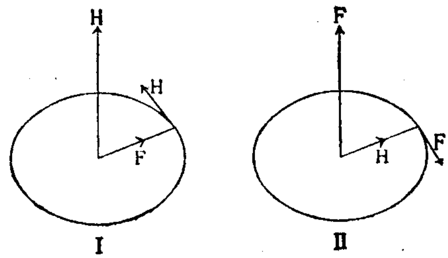


圖62　電磁爲交錯量

一質點之坐標分向q與其動量分向p亦交錯量如圖63示之I圓半徑爲$F(q)$代表電力場量之坐標分向周切線爲$F(p)$代表電力場量之動量分向而中心垂直線亦$F(p)$與周切線同II圓半徑爲$H(q)$代表磁力場量之坐標分向周切線爲$H(p)$代表磁力場量之動量分向而中心垂直線亦$H(p)$與周切線同$F(p)$爲左旋而$H(p)$爲右旋亦因電磁爲交錯量也

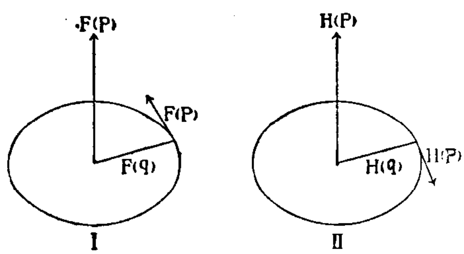


圖63　坐標q與動量爲交錯量p

由是電之坐標分向$F(q)$與磁之動量分向$H(p)$爲一致而電之動量分向$F(p)$與磁之坐標分向$H(q)$爲一致故圖62之I卽圖63之I而圖62之II卽圖63之II由是得§61〔108〕式之電磁關係亦卽圖54之所示

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{curl}\,H &= \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\\ \mathrm{curl}\,F &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots〔108〕$$

電子繞行於軌道則有磁力場量垂直於軌道平面之中心而電子自旋有磁軸此磁軸與軌道之切線爲並行故符合於圖 62 之 I

夫坐標分向與動量分向之視爲交錯量由於六爻之卦代表 q_x,q_y,q_z 三度與 p_x,p_y,p_z 三度（§56〔77〕式）而內外卦爲交錯量於是電子之坐標分向在其自旋平面之側視若一直線而動量分向在其自旋之磁軸垂直於自旋平面者此於電子之算有甚重要

通常之算法有數量乘 (the scalar product) 與向量乘 (the vector product) 之殊若有 A,B 二向量之乘而示如下式謂之數量乘

$$AB=ab\cos(A,B) \qquad (9)$$

上式 a 爲 A 向量之量 b 爲 B 向量之量 (A,B) 爲兩向量所成角度數量乘之記號爲 AB 或 (AB) 於是有下式

$$AB=BA \qquad (10)$$

若 A,B 方向相同其量相等則有下式

$$AA=a^2 \qquad (11)$$

若 A,B 爲垂直則如下式

$$AB=0 \text{ 當 } A\perp B \qquad (12)$$

若有 A,B 二向量之乘示如下式謂之向量乘其記號爲 $[AB]$ 而此非普生括號（§35〔37〕式）

$$[AB]=ab\sin(A,B) \qquad (13)$$

上式 $[AB]$ 爲一向量垂直於 A 與 B 兩向量所成之面積而其量代表此面積之大小

於是 $$[AB]=-[BA] \qquad\qquad (14)$$

上式自 A 至 B 爲左旋自 B 至 A 爲右旋以分正負若 A,B 爲垂直其量相等則如下式

$$[AA]=a^2 \qquad\qquad (15)$$

若 A,B 方向相同則如下式

$$[AB]=0 \text{ 當 } A \parallel B \qquad\qquad (16)$$

張量者兩向量之乘而向量亦謂之一階張量數量謂之零階張量而三階四階則謂三向量之乘四向量之乘對稱張量爲非交錯量故爲數量乘而式如次

$$\left.\begin{aligned} &AB=ab\cos(A,B) \\ &AB=BA \\ &AB=ab \quad \text{當 } A\parallel B \\ &AB=0 \quad \text{當 } A\perp B \end{aligned}\right\} \qquad\qquad [114]$$

對稱方陣代表對稱張量故對稱方陣爲數量反稱方陣代表反稱張量故反稱方陣爲向量反稱張量爲交錯量故爲向量乘而式如次

$$\left.\begin{aligned} &[AB]=ab\sin(A,B) \\ &[AB]=-[BA] \\ &[AB]=ab \quad \text{當 } A\perp B \\ &[AB]=0 \quad \text{當 } A\parallel B \end{aligned}\right\} \qquad\qquad [115]$$

若 i,j,k 爲 x,y,z 三分向之基本向量則在對稱張量有下式

$$\left.\begin{aligned} &ii=jj=kk=1 \\ &ij=jk=ki=0 \end{aligned}\right\} \qquad\qquad [114]_a$$

故 $$AB=(iA_x+jA_y+kA_z)(iB_x+jB_y+kB_z)$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \quad\cdots\cdots(17)$$

在反稱張量有下式

$$\left.\begin{array}{l}[ii]=[jj]=[kk]=0\\ [ij]=k,\ [jk]=i,\ [ki]=j\\ [ji]=-k,\ [kj]=-i,\ [ik]=-j\end{array}\right\} \quad\cdots\cdots[115]_a$$

故 $$[AB]=[(iA_x+jA_y+kA_z)(iB_x+jB_y+kB_z)]$$

$$=kA_xB_y-jA_xB_z-kA_yB_x+iA_yB_z+jA_zB_x-iA_zB_y \quad\cdots\cdots(18)$$

於是 $$\left.\begin{array}{l}[AB]_x=A_yB_z-A_zB_y\\ [AB]_y=A_zB_x-A_xB_z\\ [AB]_z=A_xB_y-A_yB_x\end{array}\right\} \quad\cdots\cdots[115]_b$$

若 A,B,C 三向量而有 $A(BC)$ 之乘則 (BC) 爲數量而 A 爲向量故 $A(BC)$ 亦爲向量

而 $$A(BC)\neq B(CA)\neq C(AB) \quad\cdots\cdots(19)$$

上式三向量其向與量互各不同

若 A,B,C 三向量而有 $A[BC]$ 之乘則爲一數量蓋爲 A 向量與垂直於 BC 平面之向量之數量乘而 $A[BC]$ 爲並行四邊立體形之體積而 A,B,C 爲其三邊

於是 $$A[BC]=B[CA]=C[AB] \quad\cdots\cdots(20)$$

上式三數量爲相等

卐卍化圖以周切線與圓半徑爲交錯量而中心垂直線代表周切線之

種種方向此與向量乘之向量代表面積者意義不同

§67 超相對論使相對論量子論兩者原理化而爲一

二十世紀物理學上兩大進步曰相對論曰量子論自博郎克發明量子波耳用之說明電子軌道電子繞核猶地繞日而波耳電子軌道惟爲正圓故光譜景線惟氫爲符氦以上者不獲解也哈生保是用弃之創方陣算法而振動子之能爲半能力元奇倍數此所謂新量子論狄拉克更引用相對論之義以方陣代表四度而導出電子方程式可引出希魯汀格物質波論之方程式索麥斐爾特創電子橢圓軌道之算亦引用相對論質量因運動而變之義算出軌道長徑亦潛移可知量子論之在今日之進步惟其引用相對論之故耳然迄未能包舉相對論而使之盡入於量子論之樊中而相對論亦未能囊括量子論與之混成而化爲一之二說者可得以通郵而自各有其特立之基未之嘗能一惟易之說則將化之而能一之此在二者之塗均呈顯著之進步

相對論者一交錯量之關係而已然僅三度與第四度 S_x,S_y,S_z 三度爲空間則 T_x,T_y,T_z 三度合一爲時間線反之 T 三度爲空間則 S 三度合一爲時間線若 ψ 爲 S 空間中一向量 φ 爲 T 空間中一向量則 ψ 與 φ 爲交錯量交錯量必相與垂直其値則 $+1$ 與 -1

易說亦交錯量耳 S_x,S_y,S_z,S_τ 爲四度體系第五度分別與之垂直則有 E_x,E_y,E_z,E_τ 但須視之若一反之 E 爲四度體系則 S 四度亦視之若一爲第五度此陰陽兩四度體系之爲交錯量也故曰超相對論若用作圓則 H_n 與 H_m 一爲圓半徑一爲周切線二者遞相爲第五度與四度之合而 H_n

亦自爲左旋之圓β爲半徑α爲周切線 H_m 爲右旋之圓α爲半徑β爲周切線α與β遞相爲第四度與三度之合是故量子成於左旋右旋之圓而卽卐卍兩形於是超相對論乃將相對論與量子論化而爲一

今相對論止於四度而不及五則不能將量子論完全吸收今量子論狄拉克已用相對論之義其式則有四易方陣用其法而式有八（詳述於拙著綜合物理學）所示易算有左右旋而狄拉克式比較僅一旋不及兩旋則量子論亦不能將相對論完全同化而易固優爲之

伏羲八卦演出諸方陣光波量子陰陽電子悉在其中蓋其本卽左右旋之卐卍兩形而相對論之全部義理賅而存焉夫兩旋爲交錯量一旋則有所不徧

五行爲五度而相生者差一相尅者差二電子爲 0,1 之變是用差一量子爲 +1, −1 之變是用差二而差二爲交錯量相生之序金水木火土也相尅之序金木土水火也之二者循環之無端若用於四則不周是故不得不有五行也五行者眞彼周行樞始得其環中以應無窮

第十三章

超相對論說明半量子數

§68 電子能力爲半量子奇倍數

半量子之說作於哈生保新量子論自有量子論以來未之前聞也電子之能力爲半量子奇倍數哈生保得之於方陣算法而希魯汀格亦得之於波動力學之算此雖數理自至而其根本緣由仍非易喻稽諸超相對論之本義則亦謋然已解如土委地矣

量子者五度體系而在第四度則爲光波在三度則爲陰陽電子由 §65 圖61之 II 爲放射光波 $h\nu_{nm}$ 以 $-H_m$ 爲第五度 H_n 爲四度之合 III 爲吸收光波 $h\nu_{mn}$ 以 $-H_n$ 爲第五度 H_m 爲四度之合故 H_n 與 H_m 爲交錯量而遞相爲圓半徑與周切線蓋出於卐卍化圖光波之向若轉爲電子之向則由四度而入於三度示如圖 64_a

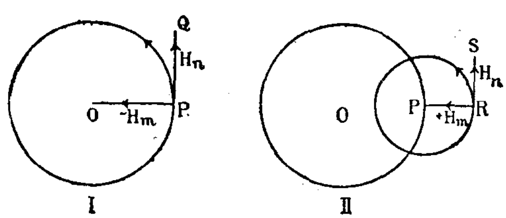


圖 64_a $h\nu_{nm}$ 光波化爲電子

上圖I OP 爲圓半徑代表第五度 $(-H_m)$ PQ 爲圓周切線代表四度之合 (H_n) 上圖 II O 爲圓中心 P 爲圓周上任何點以 P 爲中心 PR 爲

半徑更作爲圓則 PR 代表第四度而圓周切線 RS 代表三度之合於是

$$RS=PQ=H_n \cdots\cdots (1)$$

$$RP=-PO=H_m \cdots\cdots (2)$$

因 $H_n=\frac{1}{2}$，$H_m=-\frac{1}{2}$ 故第一光波(54〔39〕$_a$ 式)轉入三度之中爲下式

$$h\nu_{nn}=H_n-(-H_m)=0 \cdots\cdots〔116〕_a$$

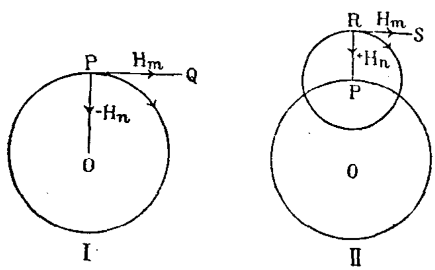


圖64_b $h\nu_{mn}$ 光波化爲電子

蓋 H_n, H_m 爲交錯量故 $H_m=-H_n$, $H_n=-H_m$

第二光波(§54〔39〕$_b$式)轉入三度之中如圖64_b

於是 $$RS=PQ=H_m \cdots\cdots (3)$$

$$RP=-PO=H_n \cdots\cdots (4)$$

故得 $$h\nu_{mm}=H_m-(-H_n)=0 \cdots\cdots〔116〕_b$$

〔116〕$_a$ 式〔116〕$_b$ 式二式之量子 $h\nu_{nn}=0$ 僅代表四度之合以 H 命之

$$H=h\nu_{nn}=0 \cdots\cdots〔117〕$$

此外更則有第五度在圖 64_a 之 I 仍爲 PO 卽 $-H_m=-(-\frac{1}{2})$ 於是有下式

$$H-H_m=\frac{1}{2}h\nu \cdots\cdots〔118〕_a$$

在圖 64_b 之 I 仍爲 PO 卽 $-H_n=-\frac{1}{2}$ 而有下式

$$H-H_n=-\frac{1}{2}h\nu \cdots\cdots〔118〕_b$$

第五度爲電故電子爲半量子之值因 H 代表四度之合故有下式

$$H=H_x+H_y+H_z+H_\tau=0 \cdots\cdots〔117〕_a$$

而四度視爲等值故有下式

$$H_x=H_y=H_z=H_\tau=0 \text{ ………………………… } [117]_b$$

於是 $H=0$ 亦代表四度中之每一度故得下式命之以八卦

$$\left.\begin{array}{ll} \text{乾}\ H_x-H_m=\frac{1}{2}h\nu & \text{坤}\ H_x{}^*-H_n=-\frac{1}{2}h\nu \\ \text{兌}\ H_y-H_m=\frac{1}{2}h\nu & \text{艮}\ H_y{}^*-H_n=-\frac{1}{2}h\nu \\ \text{震}\ H_z-H_m=\frac{1}{2}h\nu & \text{巽}\ H_z{}^*-H_n=-\frac{1}{2}h\nu \\ \text{離}\ H_\tau-H_m=\frac{1}{2}h\nu & \text{坎}\ H_\tau{}^*-H_n=-\frac{1}{2}h\nu \end{array}\right\} \text{ ………… } [119]$$

第五度配四度中之每一度於是一度之值爲半量子故在三度之中量子爲二度型此於量子之算有關重要

圖 64_a 之 II 與圖 64_b 之 II H_n 與 H_m 皆正值此示三度中之情形亦同於五度中之情形如§65圖 61 之 I 所示故五度與三度爲符合此卽超相對論三五相等之定理

三度中物體受兩種不同方向之旋動力其果乃在合力之方向而運動在四度中則不然無合力可言乃兩種獨立之轉同時並起電子爲第五度而其在三度中之行動得以合力說之者三五相等之定理也余爲易方陣之陰陽電子方陣幾何解析(詳述於拙著綜合物理學)而其中受合力之支配

H_n 與 H_m 爲交錯量故爲 $+1$ 與 -1 於是$[118]_a$ 式與$[118]_b$ 式所示電子爲 0,1 之變斯異於量子爲 $+1$, -1 之變也 差二之數謂之一量子之值則差一之數謂之半故電子爲半量子之值若以 $+1$, -1 之變爲中心坐標則 0,1 之變乃爲在周坐標 (§36) 故電子之公式宜用極坐標算之

§69　希魯汀格公式之極坐標算

希魯汀格算線性振動子之能力爲半能力元奇倍數振動者來復動也至於旋動子卽圓運動圓運動者不計勢能故由〔69〕式（§45）求之甚易命 I 爲旋動慣性 φ 爲角度因 $I=mr^2$

故
$$\frac{1}{I}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{8\pi^2E}{h^2}\psi=0 \qquad [120]$$

上式之解爲次式

$$\psi=\begin{matrix}\sin\\ \\ \cos\end{matrix}\left[\sqrt{\frac{8\pi^2E}{h^2}}\varphi\right] \qquad [120]_a$$

上式 φ 必爲整數否則 ψ 將不爲單一數值且不爲聯屬之解因 $\varphi=\varphi+2\pi$

故
$$E=\frac{n^2h^2}{8\pi^2I} \qquad [120]_b$$

若一質點循球面旋轉則以下法算其能力以拉普拉斯導誘係數 $\triangle$ 由空間直角坐標改用極坐標極坐標者有一定點之距離 r 並與地球經度與緯度補角相當之兩角度 φ 與 θ 於是動能如下式

$$T=\frac{1}{2I}\left(P_\theta^{\ }+\frac{P_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) \qquad (5)$$

以 Δ^* 記此導誘係數有下式

$$\Delta^*\psi=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \qquad [121]_a$$

由〔69〕式得下式

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{8\pi^2IE}{h^2}\psi=0 \qquad [121]$$

上式若 ψ 爲單一數值並於球面上爲聯屬之解則必有下式

$$\frac{8\pi^2IE}{h^2}=n(n+1) \qquad n=0,1,2 \qquad (6)$$

於是能力如下式　$$E=\frac{n(n+1)h^2}{8\pi^2 I}\quad\cdots\cdots[121]。$$

依波耳量子論　$$I\omega=n\frac{h}{2\pi}\quad\cdots\cdots(7)$$

上式 ω 爲旋動角速度 $I\omega$ 爲角動量 n 爲整數 h 爲博郎克常數由(6)式因 $E=T=\frac{1}{2}mv^2$

故　$$I\omega=\frac{h}{2\pi}\sqrt{n(n+1)}\quad\cdots\cdots(8)$$

由上式可知在波耳量子論 $\frac{2\pi I\omega}{h}$ 等於 0,1,2 ⋯ 等而由希曾汀格方程式〔121〕所得 $\frac{2\pi I\omega}{h}$ 等於 0, 1.4142, 2.4495, 3.4641, 4.4721 ⋯ 等所以不同者仍以半量子值之引用

蓋　$$n(n+1)=(n+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}\quad\cdots\cdots(9)$$

故　$$E_1-E_2=\frac{h^2}{8\pi^2 I}\{n_1(n_1+1)-n_2(n_2+1)\}$$

$$=\frac{h^2}{8\pi^2 I}\{(n_1+\tfrac{1}{2})^2-(n_2+\tfrac{1}{2})^2\}\quad\cdots\cdots(10)$$

§70　拉普拉斯導誘係數用極坐標

拉普拉斯導誘係數用極坐標之算法如次命 h_1, h_2, h_3 爲三直交面參變數 H_1, H_2, H_3 爲其涵數算弧線 ds

$$ds^2=\frac{1}{H_1^2}dh_1^2+\frac{1}{H_2^2}dh_2^2+\frac{1}{H_3^2}dh_3^2=0\quad\cdots\cdots(11)$$

當 h_1, h_2, h_3 爲獨立變數時拉普拉斯係數如次

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2H_3}\frac{\partial V}{\partial h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial V}{\partial h_2}\right)+\frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial V}{\partial h_3}\right)=0 \quad (12)$$

若命 h_1,h_2,h_3 爲 r,θ,φ 而 $H_1=1$，$H_2=\frac{1}{r}$，$H_3=\frac{1}{r\sin\theta}$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0 \quad (13)$$

設 $V=R\,\Theta\,\Phi$ 而 R 但爲 r 涵數 Θ 但爲 θ 涵數 Φ 但爲 φ 涵數得下式

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\Phi\partial\varphi^2}=0 \quad (14)$$

此惟可能當 $\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)$ 爲一常數如 $n(n+1)$ 者 $\frac{\partial^2\Phi}{\Phi\partial\varphi^2}$ 爲一常數 $-m^2$

而 Θ 適於下式

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\left\{n(n+1)=\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta=0 \quad \cdots\cdots(15)$$

書 Θ 爲 u 而 $\sin\theta$ 爲 μ 則得下式

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right\}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}u=0 \quad \cdots\cdots(16)$$

從上式之解 Θ,R,u 可得拉普拉斯係數如下值

$$\begin{matrix} r^n \\ r^{-n-1} \end{matrix}\ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\ m\,\varphi\,u_n^m$$

而 u 爲(16)式之解 m,n 可任何實數或複數此拉普拉斯係數用極坐標之正常解法

第十四章

河洛眞歸

§71 河圖爲量子洛書爲半量子

河洛之數自古目爲神奇而莫識其根本余今說之實乃量子與半量子是已量子爲光波而半量子爲電子光波在第四度而電子在三度是之謂陽一而陰二空間者以之爲陽而時間者以之爲陰六爻以迎陰陽而陽爻爲━陰爻爲╍由此義也

量子者共名也其本爲五度體系而其在第四度爲光波在三度則爲陰陽電子然則電子固亦爲量子已而又以之爲半何也曰依相對論固無辨乎量子與電子一是皆成於卐卍兩旋惟斯兩旋爲交錯量方其入於三度則一見焉一不見焉見者謂之陽而不見者謂之陰見者命之曰一而不見者命之曰零然零非無之謂也其隱而不見而已矣是故隱乃謂之陰顯乃謂之陽陰陽之義由斯立焉

α, β 爲交錯量互交直角四度中視 α 爲 0, β 爲 $+1$ 同時亦視 β 爲 0, α 爲 -1 若三度中不然 α 既視之爲 0 而 β 爲 $+1$ 同時不得更視 β 爲 0 而 α 爲 -1 是故四度中左右兩旋同時兼舉而三度中不然既已左旋不能同時爲右旋而既已右旋亦不能同時爲左旋於是卐卍兩旋必有一隱而不見焉

其隱爲左則旋爲右其隱爲右則旋爲左陰陽電子自此區焉

§72 河圖之解爲伏羲八卦

今取十五棋子九白而六黑布列五方前一後二左三右四而中爲五凡十有五子爲五方之列單數陽而用白雙數陰而用黑蓋宇宙本五度一三五爲陽其積則爲九故乾謂之九二與四爲陰其積則爲六故坤謂之六而九六之和爲十五凡河洛之數皆以之爲本

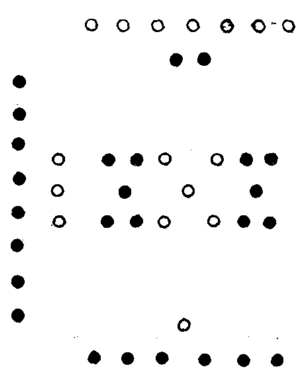


圖65 河圖之數

五方既列於是配之其陰者配以陽而數從同列之在外其陽者配以陰而數從同列之在外又在五方皆加五中央以黑四方視其外周之色而從同之此爲河圖凡五十有五子自一至十之總和也如圖 65 示之

河圖之數聯一三七九與二四六八則兩皆右旋如圖66示之天文中螺旋星氣有如此形方今天文學說宇宙有螺旋星氣千萬萬而太陽所在螺旋星氣曰銀河系天上列星所可見者皆銀河系螺旋星氣中之星而他螺旋星氣中之星不可得見也每一螺旋星氣有恆星質量如太陽者千萬萬由是觀之宇宙之大概可知矣

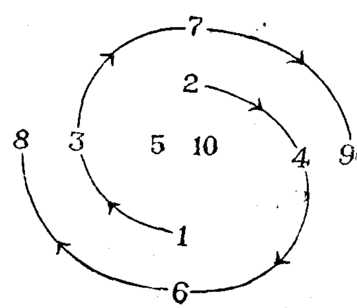


圖66 河圖單雙數之聯

易經序卦孔子八卦之所由出余不欲於此言之然取其中之一段以爲河圖之解卦序乾坤屯蒙需訟師比小畜履泰否同人大有謙豫今但取師比至謙豫凡十卦列之如圖67

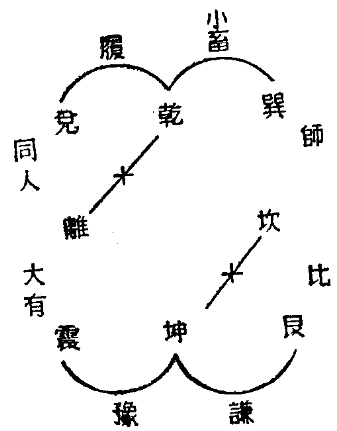


圖67 乾坤之交

孔子之排列此十卦也爲太極圖亦即河圖乾坤相交而又乾交三陰坤交三陽三陰者巽爲坤初離爲坤中兌爲坤上故三陰成坤三陽者震爲乾初坎爲乾中艮爲乾上故三陽成乾太極圖者陰陽之相交也圖67爲伏羲八卦而示乾交三陰坤交三陽遂成八卦而泰否爲乾坤相交其中列之其符合於河圖示之如圖68

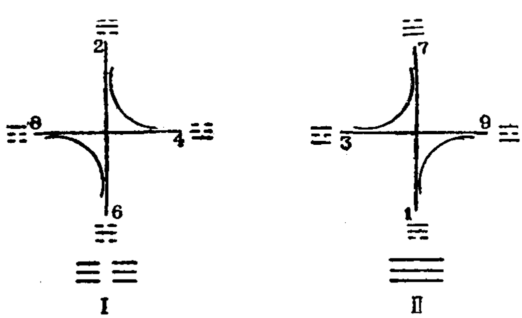


圖 68 河圖之解

左圖 I 2,6爲時間向量 4,8 爲空間向量

II 3,9爲時間向量 1,7 爲空間向量

命數見圖66所示上圖 I,II 均爲雙曲線者蓋時間向量在空間中合一故時間向量縮爲零則空間向量須代表空間三度由解析幾何公式 $y=x^3$ 爲波形曲線故一向量代表三度則其線波形因其成於x^3故稱三乘曲線而實代表空間由是建立時間線於原點則波形曲線變雙曲線 I,II 兩雙曲線即伏羲八卦卐卍兩方陣亦可以

左旋右旋之圓代表之 I,II 之合爲河圖此證河圖爲量子

五度之義析爲空時電磁（§48 圖 31）爲 A,B,C,D 爲一二三四示如圖69 之 I 視空時電磁爲四向量則四者互成直角是以爲一周然空間中 x 至 y 爲一直角 y 至 z 爲一直角 z 至 x 爲一直角是以三直角爲一周因是之故若在空間則有三合之義蓋 AD 合一 B 自子而至亥 C 自酉而移未三合者以十二支之序則曰申子辰曰寅午戌曰巳酉丑曰亥卯未 II 之所示亥卯未之三合也

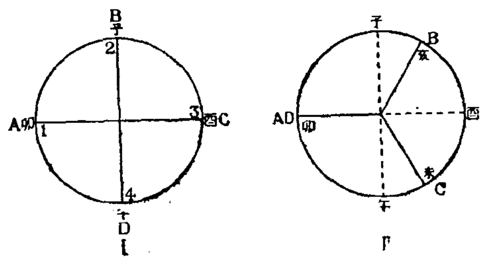


圖 69 三合之義

由三合之義圖68變坎六爲空間向量則成乾六變離三爲空間向量則成坤三於是乾六在卯乃坎六之左移一直角也震四移未而艮八移亥如圖70之 I 坤三在酉乃離三之右移兩直角也兌七移巳而巽一移丑如圖 70 之 II 陽左移一直角陰右移兩直角者陽一陰二之義也於是乾艮震爲陽三度而坎二爲時間線坤巽兌爲陰三度而離九爲時間線由上圖作成太極圖

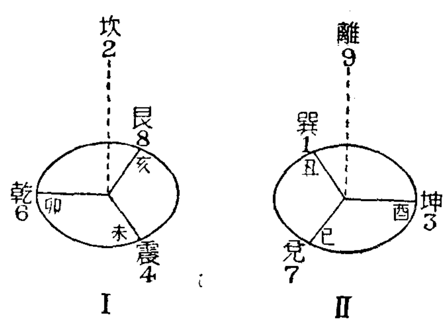


圖 70 陰陽兩三合

§73 洛書之解爲文王八卦

洛書者戴九履一左三右七二四爲肩六八爲足其數縱橫對角相加皆十五圖71之 I 爲洛書未變前原形乃自然次序 II 爲洛書由 I 變 II 隨後有說震巽在坎離之前用未變之前艮兌在坎離之後用既變之後又坤坎爲陰用未變之前乾離爲陽用既變之後如圖 72 I,II 示之

1	2	3
4	5	6
7	8	9

I

4	9	2
3	5	7
8	1	6

II

圖71　洛書原形與洛書

圖72 I,II 之合而用洛書之數則巽一變四震四變三坤三變二坎二變九而坎離合一八之週期九卽是一故坎二變九乃化爲一於是爲文王八卦符合洛書之數如圖72之 III 示之

巽1	坎2	坤3
震4		

I

	離9	
		兌7
艮8		乾6

II

巽4	離9	坤2
震3		兌7
艮8	坎1	乾6

III

圖 72　洛書爲文王八卦

此用河洛之數由伏義八卦而變爲文王八卦若夫用上古天文而變伏義八卦爲文王八卦則不在此書之論是故河圖與伏義八卦爲一物而爲量子洛書與文王八卦與太極圖三者爲一物而爲電子文王八卦之乾艮震太極圖中之半白也巽坤兌半黑也坎白中之黑也離黑中之白也有洛書斯必有文王八卦而洛書之數洪範著之故文王八卦不在唐虞以後

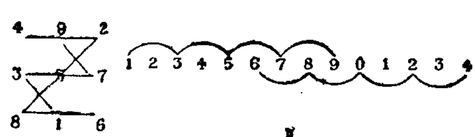


圖 73　洛書爲半量子

若聯洛書 1,3,7,9 與 4,2,8,6 卽成卍字陽順行 1,3,5,7,9 陰逆行 4,2,0,8,6 示之如圖 73

故河圖有卐卍兩形而洛書僅卍字一形此所以河圖爲量子洛書爲電子也

§74 洛書之演變

洛書之演出由圖 71 之 I 之自然次序而來余今言其方示如圖 74 左圖原形分爲左右旋圓 I α 爲單數之圓左旋 β 爲雙數之圓右旋 II α 旋 π 即一周之二分之一 β 旋一周即 2π 於是 1 至矢向所指之處 2 至原位矢向示之 III α,β 皆右旋 $\frac{\pi}{4}$ 即 45° 於是 α 爲戴九履一左三右七 β 爲二四成肩六八成足 α,β 兩合遂成洛書

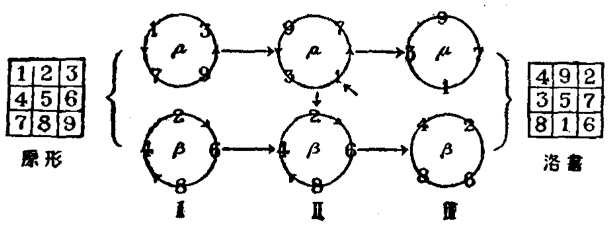


圖 74 自然次序演成洛書

若單就原形比較洛書則 α 左旋 $\frac{3\pi}{4}$ 而 β 右旋 $\frac{\pi}{4}$ 即得此謂之陽三陰一之義邵康節曰天之體四用者三不用者一地之體四用者三不用者一而乾之體十有六見上經者十二見下經者四坤之體十有六見上經者十二見下經者四蓋坤爲陰陰者以不用爲用朱子易學啓蒙曰陰陽之體數常均而用數則陽三陰一圖 74 之演變更爲圖 75 以說明之

圖75 I α 爲陽 β 爲陰陰陽皆自 0 線 α 左行至 +1 線 β 右行至 −2 線此代表 α 旋半周 β 旋一周 II 但陰必從陽故 α 自 0 至 +1 而 β 則自 +1 至 −1 III 左旋右旋爲數差一——差者差一直角之謂也今以直角之差命爲

二則左旋右旋謂之差二在三度中＋1與－1之差爲兩直角而四度中之直角爲三度中之半故五度中之直角爲三度中直角之四分之一故α不至乎＋1 而去0線爲$\frac{3}{4}$此$\frac{1}{4}$之差卽五度中之直角由於左旋右旋之故也於是β亦去－1線$\frac{1}{4}$而α,β之差爲二此卽洛書之一周一周之差仍復原位故

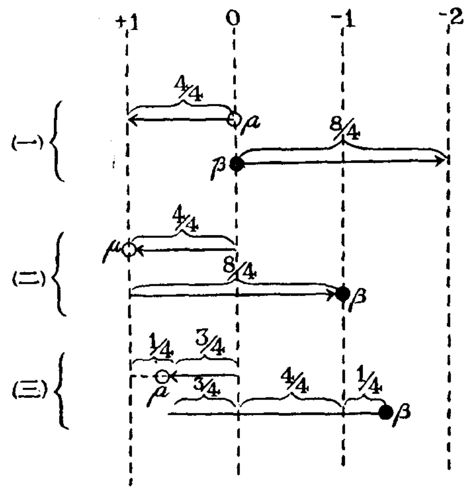


圖 75　洛書證實陽三陰一

α,β又視爲皆在0線陽自0計算則陰之計算自＋1故陽行四分之三而陰行二又四分之一乃作四分之一α,β復位故演變之數可爲無窮

電爲陽磁爲陰而磁子在A空間中則爲中和子中和子卽質量之基本其在電子之質量謂之麗子故物質之能力四分之三屬於電磁場量四分之一屬於引力場量此愛因斯坦普通相對論所算出也引力場量起於質量而電磁場量起於電量以上所說陽三陰一之義而洛書所證卽是此義

第十五章

超相對論三定理

§75 陽一陰二定理

超相對論有三定理曰陽一陰二曰三五相等曰二四同功陽爻著爲—陰爻著爲--陽一陰二也繫辭傳曰三與五同功而異位二與四同功而異位惟是三者以窺物理之奧秘則豁然貫通焉

陰陽之義曰一陰一陽謂之道旣而又曰陽一而陰二曰陽三而陰一曰三天兩地而倚數之四說者咸有其所由余將一一講明之

何謂陽一陰一曰陰陽者交錯量也交錯量爲+1與−1故曰差二之數一爲空間向量一爲時間向量則謂之交錯量二者爲直角必一爲圓半徑一爲圓周切線若三度中兩向量爲垂直則不謂之交錯量而同屬空間向量差一直角故曰差一之數五行生尅之義相生者差一之數是在空間相尅者差二之數是曰量子+1與−1是卽卐卍是卽 H_n, H_m 而又命之 $\pm\frac{1}{2}$ 者差二之數稱爲一量子之故也二者謂之一則一者謂之半其斯之謂矣卐卍之合是爲河圖一切光波量子陰陽電子中和子與麗子咸在其中矣

何謂陽一陰二曰空間爲陽則第四度爲陰四度中直角爲三度中直角之半五度中直角爲四度中直角之半爲三度中直角四分之一此定義殊關

重要所謂陽一陰二之定理由此來也余今證之如次

凡圓半徑與周切線以之爲交錯量余命之曰卐卍化圖 (§66) 蓋其義由卐卍而來卐卍中之十字與其外周四線爲交錯量四而用其一足敷於算之用也凡重要定理由此化圖而證明者則有數焉詳於後論今此之用余則以之證明陽一陰二之定理

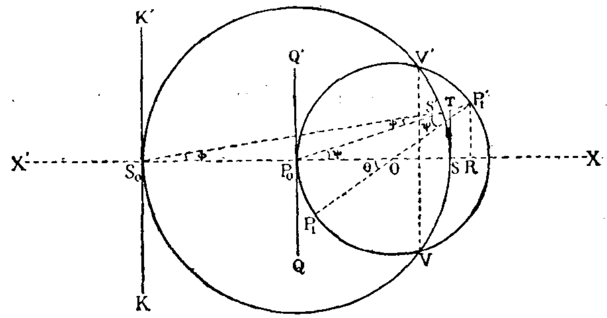


圖 76　半角定義之證明

上圖以 O 爲中心之圓作爲五度球體故圓周代表'四度體面'而圓半徑爲第五度 P_0 與 P_1 爲圓周上兩點此兩點之第五度線爲 OP_0, OP_1 其在中心所成交角爲 θ 而切線 P_0Q' 爲四度向量 P_1' 爲 P_1 過中心而至周之射影於是

$$\angle P_0P_1'P_1=\angle P_1'P_0O=\psi=\tfrac{1}{2}\theta \quad\text{〔122〕}$$

P_0P_1' 爲 P_1 之第五度線爲移坐標於周而以 P_0 爲中心故由 OP_1 移爲 P_0P_1' 於是 P_0 與 P_1 兩點之第五度線在五度中之交角爲 θ 而在周交角卽四度中之交角爲 ψ 若至三度則以 P_0 爲中心作之圓 ψ 自中心移至周以 SS' 爲弧則爲 φ 角爲 P_0, P_1 兩點之第五度線在三度中所見之交角 SK' 爲三度空間向量於是

$$\angle P_0S'S_0=\angle S'S_0P_0=\varphi=\tfrac{1}{2}\psi \quad\text{〔123〕}$$

故五度中之一直角在四度中見之爲$\frac{\pi}{4}$而在三度中見之爲$\frac{\pi}{8}$四度中之一直角在三度中見之爲$\frac{\pi}{4}$此定義余命之曰超相對論之半角定義

何謂陽三陰一曰五之週期六爲一故陽三陰一者卽陽三而陰六是亦陽一陰二也光波$h\nu_{nm}$與$h\nu_{mn}$皆成於H_n與H_m之合卽卐卍之合而卐卍皆四度體系二者皆遺其一度在空間向量是以爲0其留在時間向量者猶皆有三度兩者合而爲六度然在空間視之均之第四度耳是故光波在第四度此乃六而爲一也(§56)故時間四度向量在三度空間中爲合一(§64)陽三陰一洛書之義也（§74 圖 75）洛書爲卍字（§73）河圖爲卐卍之合(§72)陽一陰二之義也

§76　三天兩地而倚數

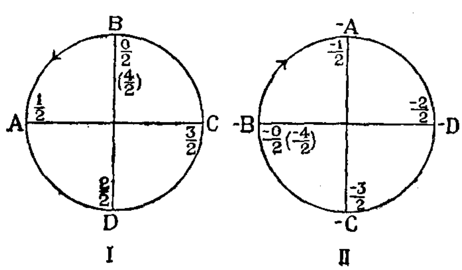


圖 77　四度交錯體系

何謂三天兩地而倚數余證之以圖77左旋右旋兩圓代表兩四度體爲交錯體系合之成五度體 I 自$\frac{0}{2}$左旋一周則至$\frac{4}{2}$而符合於$\frac{0}{2}$ II 自$-\frac{0}{2}$右旋一周則至$-\frac{4}{2}$而符合於$-\frac{0}{2}$

由§65〔112〕式H_n代表左旋之圓H_m代表右旋之圓

$$\left.\begin{aligned} H_n &= f\ (x,y,z,\tau) \\ H_m &= f^*(x,y,z,\tau) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots〔112〕$$

H_n 復析爲 α,β 二向量 H_m 復析爲 α^*,β^* 二向量由§65〔111〕式

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha=f(x,y,z), & \beta=\alpha^*=f^*(x,y,z)\\ \beta=f(\tau), & \alpha=\beta^*=f^*(\tau)\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots〔111〕$$

因 α,β 爲交錯量故爲直角 H_n 符合於 α 時則 $\beta=0$ 而符合於 β 時則 $\alpha=0$

α^*,β^* 亦交錯量故亦爲直角 H_m 符合於 α^* 時則 $\beta^*=0$ 而符合於 β^* 時則 $\alpha^*=0$

量子爲左旋右旋之兩圓故 H_n 行一周而至 $B\,(\beta=f(\tau))$ 於是 A,D,C 皆爲 0 H_m 行一周而至 $-B\,(\beta^*=f^*(\tau))$ 於是 $-A,-D,-C$ 皆爲 0 $\pm B$ 卽 $\pm\frac{4}{2}$ 代表量子在第四度是爲光波四度中直角爲三度中之半故 B 至 A 爲 $\frac{1}{2}$ 而 $-B$ 至 $-A$ 爲 $-\frac{1}{2}$

A 爲第一度亦爲第五度蓋 B 第四度也自 B 左行一直角則至 A 當爲第五度矣於是 $-A$ 亦第五度 I,II 之合 B 卽 $-A$ 而 A 卽 $-B$ 故 $\pm B$ 卽 $\pm A$ 此乃 $H_n=\frac{1}{2}$, $H_m=-\frac{1}{2}$ 兩者合而爲光波也 $\pm A$ 皆第五度者當 A 爲第五度時 $-A$ 爲四度之合當 $-A$ 爲第五度時 A 爲四度之合

若 H_n,H_m 不符合於 β,β^* 而符合於 α,α^* 則 β 與 β^* 皆 0 卽 $\pm B=\pm\frac{0}{2}$ 而 $H_n=\alpha=f(x,y,z)$, $H_m=\alpha^*=f^*(x,y,z)$ 故 $H_n=+A+D+C=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2}$, $H_m=-A-D-C=-\frac{1}{2}-\frac{2}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{6}{2}$ 而 $H_n-H_m=\frac{12}{2}$ 此須除之以 4 乃等於 $\frac{3}{2}$ 爲電子在三度空間之量子值所以除之以 4 者因五度中四周在三度中爲一周也故光波在 $\pm B$ 卽 $\pm\frac{4}{2}$ 乃作 $\pm A$ 卽 $\pm\frac{1}{2}$ 亦猶以 4 除之也

量子在第四度爲光波其量子值 $h\nu_{nm}$ 爲$\frac{2}{2}$而量子在三度空間中爲電子其量子值爲$\frac{3}{2}$空間爲陽第四度爲陰故曰三天兩地而倚數

電子三度而量子值$\frac{3}{2}$則每度之值半量子凡週期之算$\frac{3}{2}$之中可以去 1 於是爲$\frac{1}{2}$電子半量子光波全量子復返於陽一陰二之義

陽三陰二者陽崟曰九陰崟曰六斯其義也

§77 波羅吉利之算黑輻射

波羅吉利以黑輻射 (Black Radiation) 之義算光量子 (Light Quanta) 不用電磁公式所得光量子之能力值爲 $3kT$ 然尋常氣體一分子之能力值爲$\frac{3}{2}kT$ 斯足以證陽一陰二述如次

黑輻射在 T 溫度之平衡中一光量子之能力 $W=h\nu$ 凡光分子 (molecules of light) 有二以上之光原子 (atoms $h\nu$) 者略之斯爲韋恒(Wien) 輻射定律韋恒定律從博郎克公式得之而去原子之聯結由相對論動能 W 動量 p 如下式

$$W=m_0c^2(\beta-1) \quad\cdots\cdots(1)$$

$$p=\beta m_0 v \quad\cdots\cdots(2)$$

上式 m_0 爲靜止質量動之速度爲 v 若 $v>>c$ 卽速度比光速爲極小值則返於尋常力學而 $W=\frac{1}{2}m_0v^2$, $p=m_0v=\frac{2W}{v}$ 在光量子 v 幾等於 c 而 m_0 無限小故 $m_0/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 變爲常數 m

由是
$$W=mc^2 \quad\cdots\cdots(3)$$
$$p=mc=\frac{W}{c} \quad\cdots\cdots(4)$$
$$m=\frac{h\nu}{c^2} \quad\cdots\cdots(5)$$

命 n 爲單位容積中之光量子數單位面積之在外限者每秒時有 $\frac{1}{6}nc$ 光量子衝擊之每光量子具有動量 $\frac{W}{c}$ 故力之施於單位面積者曰壓力 (pressure) 等於 $2\cdot\frac{1}{6}nc\cdot\frac{W}{c}=\frac{1}{3}nW$ 此卽單位容積中能力值之三分之一在電磁學算得相同之值而可以實驗證之

有能力 W 之光量子數卽能力在 W 與 $W+dW$ 之間者在容積 $dxdydz$ 中而動量分向位於 p 與 $p+dp$，q 與 $q+dq$，r 與 $r+dr$ 之間者統計力學公式得之如次

$$dn_W=Ce^{-\frac{W}{kT}}dxdydzdpdqdr \quad\cdots\cdots(6)$$

上式 C 爲常數欲得具有能力 W 之光量子總數則以容積積分之又以 $4\pi p^2dp$ 代 $dpdqdr$ 而 p 爲動量分向之長度卽 (4) 式 $\frac{W}{c}$ 之值於是單位容積中具有能力 W 之光量子數

卽
$$dn_W=C'e^{-\frac{W}{kT}}W^2dW \quad\cdots\cdots(7)$$

上式 C' 爲另一常數積分諸 W 值自 0 至 ∞ 卽得單位容積光量子數此乃以定 C' 值者

由是
$$dn_W=\frac{n}{2k^3T^3}e^{-\frac{W}{kT}}W^2dW \quad\cdots\cdots(8)$$

凡具能力 W 諸光量子之總能力 du 爲下式

$$du_W=\frac{n}{2k^3T^3}\,e^{-\frac{W}{kT}}W^3dW \cdots\cdots (9)$$

茲定n之值命n但爲溫度之涵數則此涵數依熱力學(thermodynamics)定之而單位容積之總能力爲下式

$$\int_0^\infty du_W=3nkT \cdots\cdots [124]$$

蓋因

$$\int_0^\infty e^{-\frac{W}{kT}}W^3dW=k^4T^4\int_0^\infty e^{-x}x^3dx=6k^4T^4 \cdots\cdots (10)$$

由上所算每光量子之平均能力爲$3kT$而非若尋常氣體每分子之平均能力爲$\frac{3}{2}kT$ 也此不用電磁波之算惟因相對論公式之運用而得光量子輻射壓力之眞確數值由是觀之光量子爲$3kT$在四度也尋常氣體分子則爲$\frac{3}{2}kT$ 在三度也徵知陽一陰二之義爲可靠

氣體總能力遂爲 $U=3nkTV$ 其熵(entropy)之微分爲下式

$$d\Phi=\frac{1}{T}(dU+pdV)$$

$$=\frac{1}{T}\left(3nkVdT+3nkTdV+3kVT\frac{dn}{dT}dT+nkTdV\right) \cdots\cdots (11)$$

因壓力等於單位容積之能之三分之一

故

$$d\Phi=\left(\frac{3nkV}{T}+3kV\frac{dn}{dT}\right)dT+4nkdV \cdots\cdots (12)$$

爲使 $d\Phi$ 之微分正確則必有下式

$$\frac{3nk}{T}+3k\frac{dn}{dT}=4k\frac{dn}{dT} \cdots\cdots (13)$$

故

$$\frac{dn}{dT}=\frac{3n}{T} \cdots\cdots (14)$$

命 $n=Ak^3T^3$ 以爲上式之解 A 爲未知常數而與斯底文常數 σ (Stefan's constant) 相關聯因單位容積之能力爲 $3nkT=3Ak^4T^4$ 由比較得 $\sigma=3Ak^4$ 以 n 之值代入(12)式得下式

$$d\Phi=12Ak^4T^2VdT+4Ak^4T^3dV \quad \cdots\cdots(15)$$

故
$$\Phi=4Ak^4T^3V \quad \cdots\cdots[125]$$

無他常數因 $T=0$, $n=0$ 而氣體無存

由 $A=\frac{\sigma}{3k^4}$ 故 $\Phi=\frac{4}{3}\sigma T^3V$ 於是自由能力 $F=U-T\Phi$ 可得而等於下式

$$3nVkT-T\cdot 4nkV=-nVkT=-AVk^4T^4 \quad \cdots\cdots(16)$$

亦卽 $-NkT$ 而 N 爲 V 容積中之分子數

因單位容積中有 W 能力之分子之總能力爲

$$du_W=\frac{Ah^4}{2}e^{-\frac{h\nu}{kT}}\nu^3d\nu \quad \cdots\cdots(17)$$

上式由(9)式而置 $W=h\nu$ 於是得韋恒定律由此可算化學常數如博郎克薩柯(Sackur)台屈魯特(Tetrode)等之所爲

關於自由能力 F 博郎克傑白斯(Gibbs)自利羅英等之研究有下式

$$F=-kT\log\sum_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \quad \cdots\cdots[126]$$

上式 Σ 之號之用可視爲積分取諸 $6N$ 度之全部位相之展開 (phase extension) 而位相之展開代之以 g 由化學常數之算 $g=h^3$ 乃有下式

$$F=-kT\log\left[\left(\frac{\iiiint\!\!\iint e^{-\frac{W}{kT}}dxdydzdpdqdr}{g}\right)^N\frac{1}{\underline{|N}}\right]$$

$$=-kNT\log\left[\frac{eV}{Ng}\int_0^\infty e^{-\frac{W}{kT}}4\pi p^2dp\right]$$

$$=-kNT\log\left[\frac{8\pi eV}{Ng}\cdot\frac{k^3T^3}{c^3}\right]\cdots\cdots(127)$$

因光量子之質量爲無故$F=-kNT$不須增常數而$\log\left[\frac{8\pi eV}{g}\frac{k^3T^3}{c^3}\right]=1$

但$N=Ak^3T^3V$

故 $$A=\frac{8\pi}{c^3g}=\frac{8\pi}{c^3h^3}\cdots\cdots(18)$$

由是 $$du_\nu=\frac{4\pi h}{c^3}e^{-\frac{h\nu}{kT}}\nu^3d\nu\cdots\cdots(128)$$

上式比較韋恒定律則差 2 之乘數

一氣體爲單原子 (monatomic) 雙原子 (diatomic) 三原子 (tri-atomic) 等以及光量子之混合可得博郎克定律如下式

$$du_\nu=\frac{8\pi h}{c^3}\nu^3\left[e^{-\frac{h\nu}{kT}}+e^{-\frac{2h\nu}{kT}}+e^{-\frac{3h\nu}{kT}}+\cdots\right]\cdots\cdots(10)_a$$

上式卽§15(10)式由無限幾何級數之總和當$y<1$有下示之公式

$$1+y+y^2+y^3+\cdots=\frac{1}{1-y}\cdots\cdots(19)$$

故 $$\frac{1}{1-e^{-x}}=\frac{e^x}{e^x-1}=1+e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots\cdots\cdots(20)$$

而 $$\frac{1}{e^x-1}=e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots\cdots\cdots(21)$$

在一完全氣體(perfect gas)能力與動量如次

$$W=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right),\quad p=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

能力在 W 與 $W+dW$ 之間之分子之 dN 由統計力學得下式

$$dN_W=CNe^{-\frac{W}{kT}}p^2dp=CNe^{-\frac{W}{kT}}m_0c^2\sqrt{\alpha(\alpha+2)}(\alpha+1)dW \quad (22)$$

上式置 $\frac{W}{m_0c^2}=\alpha$ 若 m_0 相當大 α 值爲甚小可得麥克斯威爾之公式反之若 m_0 甚小則諸分子速度鄰於 c 於是 α 值比 1 爲甚大而有下式

$$dN_W=C'Ne^{-\frac{W}{kT}}W^2dW \quad \text{〔129〕}$$

上式爲博郎克韋恒定律(Plank-Wien law) 由上之算得陽一陰二定理如次

『空間三度爲陽第四度爲陰尋常氣體分子在空間光量子在第四度光量子與尋常氣體分子能力之比例爲 2 與 1 』

§78　三五相等定理

電子爲電力線之散佈電力線之散佈爲第五度而電子之量子値爲半此與尋常氣體分子之在三度者同故曰三五相等茲述其義

平面上一切方向以 x,y 兩軸交直角者代表之以 A 圓平面代表空間垂直於中央之 B 線爲時間線相對論之義 B 亦爲空間而 A 亦爲時間線於是 B 作圓平面而 A 線垂直於中央由是 B 圓平面者卽垂直於 A 之 B 線也而 A 圓平面者卽垂直於 B 之 A 線也 (§51 圖 44) 而 A 與 B 爲交錯量此以三度與四度言也

若有兩圓平面爲交錯量而各代表四度體系則 H_n 與 H_m 也 (§76 圖 77) 如是 H_n 爲左旋之圓而不能以 H_m 爲中央垂直之線 H_m 爲右旋之圓

而不能以 H_n 爲中央垂直之線是何以故蓋 H_n 與 H_m 遞相爲第五度與四度之合方其爲四度之合又析爲 α 與 β 而 $\alpha=f(x,y,z)$，$\beta=f(\tau)$ 亦交錯量交錯量者惟有 $+1$ 與 -1 相爲直角於是圖 77 之 I 爲 H_n 爲左旋之圓者其間 B 線爲第四度則 H_m 爲之第五度者不垂直於中央乃自 B 線左旋一直角而符於 A 線 A 線者第一度也 A,C 在一直線爲空間向量 B,D 在一直線爲時間向量而 H_m 符合空間此三五相等之說亦二四同功之義蓋 B 爲第四 D 爲第二而同屬時間向量若圖 77 之 II 爲 H_m 爲右旋之圓而 H_n 爲之第五度者亦同法釋之

圖 64_a 之 II (§68) O 爲中心之圓半徑 OP 代表第五度 P 爲中心之圓半徑 PR 代表第四度則切線 RS 代表三度空間之向量而 RP 爲 H_m，RS 爲 H_n 皆爲正值此與§65 圖 61 之 I 所示 H_n,H_m 同爲空間向量者相符合而圖 64_a 之 II 亦可以 OP 代表三度 PR 代表第四度而 RS 代表第五度此不過倒其序於 H_n, H_m 之值之正負無所異故足以爲三五相等之證明而圖 64_b 之 II 亦可同釋於是有三五相等定理

『電力線之散佈爲第五度謂之電子電子者量子在三度空間也故其能力值爲半量子與尋常氣體分子之在三度者同』

§79 二四同功定理

空時電磁命以 A,B,C,D 則 A 爲一 B 爲二 C 爲三 D 爲四由三合之義 AD 爲合是謂一四之合若空間三度而命之以三則 A 爲三 B 爲四 C 爲五 D 爲六而 AD 爲三六之合兩命數爲比較 C 曰三五 B 曰二四

前講河圖乾交三陰坤交三陽而三陰爲巽離兌合亦爲坤三陽爲震坎艮合亦爲乾交乾者巽兌皆一離獨二交坤者震艮皆一坎獨二是坎離者亦第二度亦時間線(§72 圖 67)是故二四同功

電子爲電力線之散佈自一點四向散射此依觀察者與電子同空間而言從相對論之義卽電子對於觀察者無速度若電子對於觀察者有速度則球體縮爲平面此平面垂直於其運動之向其中電力線亦自中心四向散射其故由於有速度則運動線迹爲 vt 而 vt 爲空間向量此空間者同於觀察者之空間而電力線之散佈爲第五度夫第五度與三度中一切向量爲垂直 vt 既爲空間向量亦必與第五度中一切向量爲垂直如是則電子之爲球體其中一切向量必垂直於 vt 向量而球體非變成平面不可

電子繞核爲圓運動其速度 v 則有磁力起於中心垂直於軌道平面命 e 爲電子之電量 i 爲沿軌道之電流 T 爲週期則有下式

$$i=\frac{e}{T}\qquad(23)$$

命 μ 爲磁力矩 A 爲軌道面積乃有下式

$$\mu=\frac{1}{c}iA\qquad(24)$$

故

$$\mu=\frac{e\pi r^2}{cT}=\frac{er^2}{2c}\omega_r\qquad(25)$$

上式 c 爲光速 ω_r 爲角速度 r 爲軌道半徑圓運動有向心力如下式

$$f=m\omega_r^2r\qquad(26)$$

命 H 爲陽電核之磁場電子之運動如有電流等於 $e\omega_r r/c$ 由 H 磁場之作用乃有力焉等於 $He\omega_r r/c$ 沿其半徑其向依電子運動之向與 H 之向而

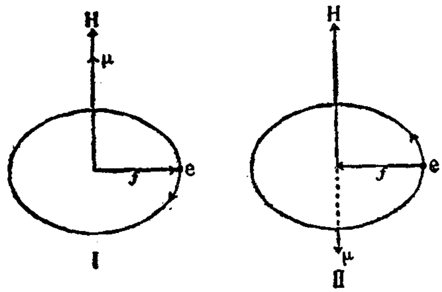


圖78 磁力矩與磁場方向之異同

定若磁力矩與磁場異向其力內向若磁力矩與磁場同向其力外向示如圖 78

當 $He\omega_r r/c$ 之力作用於電子時角速度 ω_r 乃有增量 $\Delta\omega_r$ 而向心力如下式

$$f \pm \frac{He\omega_r r}{c} = m(\omega_r \pm \Delta\omega_r)^2 r \quad \cdots\cdots (27)$$

即
$$m\omega_r^2 r \pm \frac{He\omega_r r}{c} = m\omega_r^2 r \pm 2m\omega_r\Delta\omega_r r + m\Delta\omega_r^2 r \quad \cdots\cdots (28)$$

略去 $m\Delta\omega_r^2 r$ 得下式
$$\Delta\omega_r = \pm \frac{He\omega_r r}{2mc\omega_r r} = \pm \frac{He}{2mc} \quad \cdots\cdots〔130〕$$

此角速度之增量則致磁力矩之變故磁力矩有增量如下式

$$\Delta\mu = \frac{e}{2c} r^2 \Delta\omega_r = \pm \frac{He^2}{4mc^2} r^2 \quad \cdots\cdots〔131〕$$

由 §66 圖 62 圖 63 電之動量分向爲磁之坐標分向而磁之動量分向爲電之坐標分向命 (p) 與 (q) 爲動量分向與坐標分向之記號則

$$\left.\begin{aligned} F(p) &= H(q) \\ H(p) &= F(q) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots〔132〕$$

上式證明電子運轉於軌道其運動之向即軌道切線乃爲磁向量

由圖78電子運行於軌道則有磁力矩垂直於軌道平面之中心故由圖 62之 I 亦證明軌道切線與軌道平面之中心垂直線相同均之爲磁力矩

前言電子有速度則縮而爲平面故軌道切線爲磁力矩則必垂直於電

子之平面蓋因電磁爲交錯量也於是乎電子必須爲自旋

電子爲半量子故 H_n 爲陽電子 H_m 爲陰電子而電子爲四度體系二四同功故當其有速度時則縮爲圓平面平面者二度也因其二度則垂直之向必爲磁軸故必自旋焉於是乎電子之自旋乃出於二四同功之義

一原子中電子繞核爲圓運動則電子之自旋平面垂直於軌道平面兩平面各有磁軸垂直於中如圖 79 示之若 H 爲陽電核之磁場而 RR' 爲垂直於 H 之平面之側視 rr' 爲電子軌道平面之側視 H_P 爲垂直於中之磁軸如圖 80 示之則電子自旋平面並行於 H_P 而其自旋磁軸 H_s 並行於 rr'

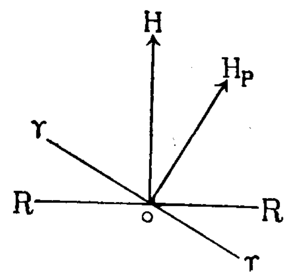


圖79　自旋平面與軌道平面

電子自旋平面代表電力線散佈所占之空間因其有軌道上之速度故縮而爲平面三五相等故自旋量子值爲半命 τ_s 爲自旋量子數

則　$\tau_s=\frac{1}{2}$ ……………………〔133〕

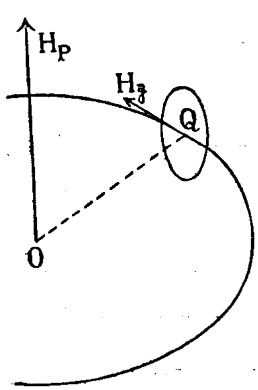


圖80　H_P, 與 H_s 磁場

能力之向量在第四度故 τ_s 在自旋磁軸 H_s 若以自旋平面視作空間向量則軌道平面爲時間向量陽一陰二故軌道運動之量子值爲 1 而由坐標在周移爲中心坐標則其值爲倍此即§75 圖 76所示在周角爲中心角之半也於是軌道之量子值爲 2 此在 H_P 之向而命之以 τ_M 如下式

$\tau_M=2$ ……………………〔134〕

由是電子聯核線之上有量子值命之以 τ_μ

而 $$\tau_\mu-\tau_s=\tau_M \quad\cdots\cdots\cdots(135)$$

故 $$\tau_\mu=\frac{5}{2} \quad\cdots\cdots\cdots(136)$$

陰電子方陣用令甲之命數則有兩圈一爲$\frac{1}{2}$一爲$\frac{5}{2}$即 τ_s 與 τ_μ

電子之自旋平面側而視之若一直線此爲電子之坐標分向著爲 q 垂直於自旋平面者爲 H_z 軸此爲電子之動量分向著爲 p 由於電子之坐標在周故〔135〕式 τ_s, τ_μ, τ_M 三量子值爲空時向量因空時爲交錯量故由〔115〕式 τ_s,τ_μ,τ_M 皆爲向量而代表之者俱爲線跡

另一種量子值爲空間向量而代表之者爲一圓平面之側視線於是命 τ 爲電子之主量子數其向量爲自旋平面之側視線因量子在空間爲二度型故以圓平面著之 τ 復析爲兩圓平面其一並行於軌道平面其一垂直於軌道平面前者量子值命曰 τ_H 後者量子值命曰 τ_k 亦均以其圓平面之側視線代表之於是有

$$\tau=\tau_H+\tau_k \quad\cdots\cdots\cdots(137)$$

而τ_k又析爲兩圓平面其一並行於聯核線其一垂直於聯核線前者量子值命曰τ_r後者量子值命曰τ_φ亦均以其圓平面之側視線代表之於是有下式

$$\tau_k=\tau_r+\tau_\varphi \quad\cdots\cdots\cdots(138)$$

三度球體有三軸互交直角亦有三平面互交直角故 $\tau_r, \tau_\varphi, \tau_H$ 三者爲主量子值 τ 之空間三分向於是τ, $\tau_H,\tau_k,\tau_r,\tau_\varphi$ 五者爲空間向量是故異於〔135〕式 τ_s,τ_μ,τ_M 之爲空時向量者而用§66〔114〕式視之若數量

空間向量在坐標分向故爲 q 而以電子自旋平面暨其分向圓平面之側視線代表之空時向量在動量分向故爲 p 而以垂直於圓平面之向量代表之是故 τ_s 者垂直於自旋平面也 τ_M 者垂直於軌道平面也二者謂之時間四度向量 τ_μ 者在聯核線也而謂之空間四度向量夫電子在軌道其運轉情形至爲繁複化而在光譜景線愈滋紛緼是必明辨其種種量子之位置而後推算順利夫主量子值 τ 之置於自旋平面側視線通常無此法而甚有利於算余則常用此矣而空間向量與空時向量兩組量子值之系統則必須有分辨而異其算乃自然也其契機在於二四同功而電子爲圓平面於是有二四同功定理

『電子爲第五度故爲四度體系運行於軌道則有速度而必化爲圓平面垂直於運動之向平面爲二度而電磁爲交錯量故其運動之向爲磁軸而電子則必爲自旋』

二四同功三五相等與陽一陰二此三者爲超相對論之重要定理其根本在於五度之義

§80　引出哈生保新量子論公式

希魯汀格特性值力學欲以舊物理學方法解釋原子見象並欲溝通量子力學之定量規則與尋常力學之間哈生保以爲非屏去舊思想不能切實瞭解原子見象故以爲凡不能直接觀察之見象之研究爲無意義而不可靠哈生保是以不用電子軌道之說而用原子特有之景線與其强度以爲研究之階於是一系偏析振動用作電子週期變化之坐標而振動之振數等於景

線之振數因景線振動與原子由甲變乙兩狀態間之更換相應故屬於電子之偏析振動可以行列式表之從基本狀態之0起算而方陣算法用之物理學哈生保實始之

先是烏倫倍克(Uhlenbeck)與高德斯密(Goudsmit)創說電子自旋景線見象諸多難解得以釋焉而無數理之證至狄拉克用方陣算法得電子之方程式其中有電磁之關係電子自旋得以窺見遂爲數理之證

在超相對論由三五相等定理得電子之能力值爲半量子由二四同功定理得電子之自旋而三五相等與二四同功實亦相須而成(§78)是故自旋與半量子值亦必相應

哈生保之算知電子能力爲半量子之奇倍數而用下式以得

$$pq-qp=\frac{h}{2\pi i} \qquad [36]$$

余今用電子自旋之義引出此式電子軌道上旋轉暫作爲直增益自旋之角動量 $m\omega q$ 則能力之公式如下示

$$H=\frac{1}{2m}(p^2+m^2\omega^2q^2) \quad \omega=2\pi\nu_0 \qquad [139]$$

於是

$$(p+im\omega q)(p-im\omega q)$$
$$=p^2+m^2\omega^2q^2+im\omega(qp-pq)$$
$$=p^2+m^2\omega^2q^2-im\omega(pq-qp)$$
$$=2mH-2\pi im\nu_0(pq-qp) \qquad (29)$$

同法書之爲下式

$$(p-im\omega q)(p+im\omega q)$$
$$=2mH+2\pi im\nu_0(pq-qp) \qquad (30)$$

因 H_n 與 H_m 爲交錯量故作下式

$$\left.\begin{aligned}2mH_m&=(p-im\omega q)(p+im\omega q)\\2mH_n&=(p+im\omega q)(p-im\omega q)\end{aligned}\right\}\quad\text{[140]}$$

由是 $$H_n-H_m=-2\pi i\nu_0(pq-qp)\quad\text{(31)}$$

$$H_m-H_n=2\pi i\nu_0(pq-qp)\quad\text{(32)}$$

光量子之質量爲無故[139]式略去 m 如下式

$$H=\tfrac{1}{2}p^2+\tfrac{1}{2}\omega^2q^2\quad\text{[139]}_a$$

由太極圖之公式§37

$$\dot{q}=[q,H]\quad\text{[40]}$$

由§38[40]$_c$式得 $$\dot{q}=[q,H]=\frac{\partial H}{\partial p}=p\quad\text{(33)}$$

$$\dot{p}=[p,H]=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\omega^2q\quad\text{(34)}$$

於是運動公式如下示

$$\ddot{q}+\omega^2q=0\quad\text{[139]}_b$$

由上式則振數之關係如下式

$$\nu_{nm}=\pm\nu_0\quad\text{[139]}_c$$

上式 ν_0 爲振動子之振數於是有下式

$$h\nu_{nm}=\pm2\pi i\nu_0(pq-qp)\quad\text{(35)}$$

故 $$pq-qp=\frac{h}{2\pi i}\quad\text{[36]}$$

上式新量子論基本方程式也余從電子自旋之義則算得之由電子之自旋其軌道運動種種變化可得以明而光譜景線與之相應咸可解也其如是波

耳電子軌道之立論不但不必放棄且將資之以爲新物理學之重要階段眞理之所鍾未可輕易言廢也

五度體系者陰陽兩四度體系之合也此卽卐卍亦卽 H_n 與 H_m 而五度之中以 H_n 爲四度之合則僅餘一度以爲 H_m 反之以 H_m 爲四度之合則則僅餘一度以爲 H_n 是之謂一四之合三度空間之中若以一度爲 H_n 則尙餘二度以爲 H_m 於是 H_n 爲磁軸 H_z 而 H_m 爲陰電子自旋平面若以 H_m 爲一度則以爲 H_n 者尙餘二度於是 H_m 爲磁軸 H_z 而 H_n 爲陽電子自旋平面是之謂三六之合三六之比猶一二之比也三五相等故二四同功二者定理則相因而至者也

第十六章

卐卍化圖引出相對論基本方程式

§81　引出愛因斯坦特殊相對論基本方程式

愛因斯坦特殊相對論用平直坐標普通相對論用彎曲坐標今引出其特殊相對論之基本方程式仍以卐卍化圖作之卐卍化圖者以圓半徑與圓周切線爲交錯量而推算者也以 §75 圖76 其 O 爲中心之圓改命爲四度體系作如圖81

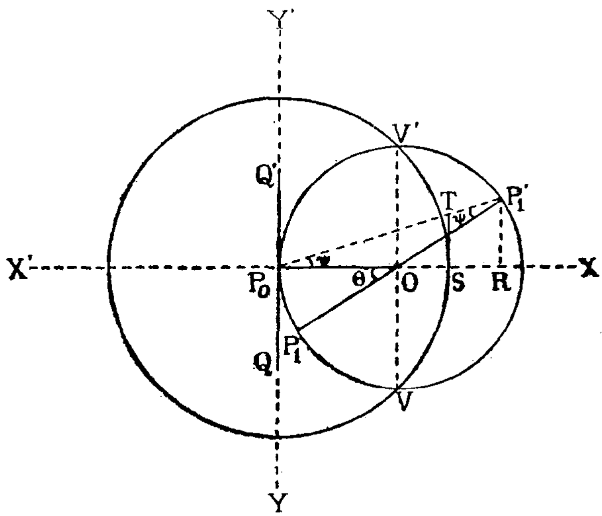


圖 81　卍 卐 化 圖 引 相 對 論

圖81爲四度球體 O爲中心P_0爲'立體面'上任何點作切線 P_0Q 於是 $OP_0=ct$ 而 $P_0Q=vt$, $P_0Q'=-vt$ 畫 XX' 並行於 OP_0, YY' 並行於P_0Q設另一點 P_1在'立體面'畫 P_1O 延長至 P_1' 而 P_1'亦在'立體面'爲 P_1 過中心之射影畫 $P_1'R$ 垂直於 XX'畫 P_0P_1' 於

是$\angle P_0OP_1$爲P_0與P_1兩點之第四度線在中心之交角命$\angle P_0OP_1=\theta$

移坐標中心於周之P_0則以P_0爲中心取任何半徑作圓兩圓交點爲V,V'第二圓周與X軸之交點爲S自S畫切線ST遇P_0P_1'於T於是P_0P_1弧所成在周之交角爲$\angle P_0P_1'P_1$而等於$\frac{1}{2}\theta$命$\angle P_1'P_0R=\psi$則$\psi=\angle P_0P_1'P_1=\frac{1}{2}\theta$於是$\psi$爲$P_1$之第四度線移於$P_0$變爲$P_0P_1'$之向而與$P_0$之第四度線所成之交角

$$\frac{P_1'R}{P_0R}=\frac{ST}{P_0S}=\tan\psi \quad\cdots\cdots(1)$$

ST並行於P_0Q'之向對於P_0點P_0Q'爲$-vt$,P_0S並行於P_0O之向因P_0Q'爲負故P_0視作右旋於是對於P_0點P_0O爲ict

故
$$\tan\psi=\frac{-vt}{ict}=i\frac{v}{c} \quad\cdots\cdots[141]$$

因
$$\tan\psi=\frac{\sqrt{1-\cos^2\psi}}{\cos\psi} \quad\cdots\cdots(2)$$

故
$$-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\psi=1-\cos^2\psi \quad\cdots\cdots(3)$$

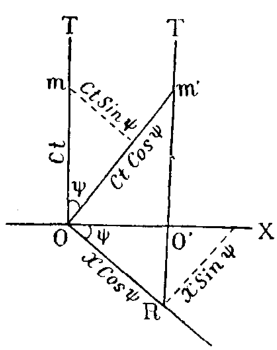


圖82 xt平面轉ψ角

於是
$$\cos\psi=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad\cdots\cdots[142]$$

$$\sin\psi=\frac{v}{c}\frac{i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad\cdots\cdots[143]$$

若S坐標系之四度爲x,y,z,t而S'坐標系之四度爲x',y',z',t'則S'對於S沿x軸之速度爲v者可視爲xt平面旋轉一角度ψ而至$x't'$平面如

圖 82 示之當 $t=0$ 時質點在 0 而 t 時之後質點在 $0'$ 於是乎有下式

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\psi - ct\sin\psi \\ ct' &= ct\cos\psi + x\sin\psi \\ y' &= y, \quad z' = z \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (4)$$

因四度中兩直角爲三度中一直角故 $-ct$ 改爲 ict 而 ct 改爲 $-ict$ 於是爲下式

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\psi + ict\sin\psi \\ t' &= t\cos\psi + \frac{i}{c}x\sin\psi \\ y' &= y, \quad z' = z \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (5)$$

以〔142〕〔143〕兩式代入上式得相對論基本方程式如次

$$\left.\begin{aligned} x' &= \beta(x - vt) \\ t' &= \beta(t - vx/c^2) \\ y' &= y, \quad z' = z \end{aligned}\right\} \cdots\cdots [144]$$

而 β 爲羅倫茲(Lorentz)轉換式

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \cdots\cdots [145]$$

§82　地運速度加於光速仍等光速

若坐標系 S 對 S' 沿 x 軸之速度爲 v' 而 S'' 對 S' 沿 x 軸之速度爲 v'' 則 S'' 對 S 沿 x 軸之速度爲 v 於是命 ψ' 爲 S' 坐標 $x't'$ 平面對 S 坐標 xt 平面轉移之角度 ψ'' 爲 S'' 坐標 $x''t''$ 平面對 S' 坐標 $x't'$ 平面轉移

之角度而ψ爲S''坐標$x''t''$平面對S坐標xt、平面轉移之角度由〔141〕式有下式

$$\tan\psi=i\frac{v}{c},\ \tan\psi'=i\frac{v'}{c},\ \tan\psi''=i\frac{v''}{c} \quad\cdots\cdots(6)$$

因$\psi=\psi'+\psi''$故有下式

$$\tan\psi=\tan(\psi'+\psi'')=\frac{\tan\psi'+\tan\psi''}{1-\tan\psi'\tan\psi''} \quad\cdots\cdots(7)$$

$$i\frac{v}{c}=\frac{i\frac{v'}{c}+i\frac{v''}{c}}{1-i^2\frac{v'v''}{c}} \quad\cdots\cdots(8)$$

故　$$v=\frac{v'+v''}{1+\frac{v'v''}{c^2}}<c \quad\cdots\cdots〔146〕$$

若$v''=c$則　$$v=\frac{c+v'}{1+\frac{v'}{c}}=c \quad\cdots\cdots〔147〕$$

若v''爲負值則　$$v=\frac{v'-v''}{1-\frac{v'v''}{c^2}}<c \quad\cdots\cdots〔148〕$$

若$v'=c$則　$$v=\frac{c-v''}{1-\frac{v''}{c}}=c \quad\cdots\cdots〔149〕$$

故小於光速之兩速度相加仍小於光速兩速度一等於光速一小於光速相加仍等於光速此證地球運行對於地上光線之傳佈不生影響蓋地運速度加於光速仍等光速

第四度爲ct若視作時間線則爲ict如是者以光速爲無速而自靜者遂反爲$-ct$然卽不自靜亦復$-ct$則以任何速度加減於光速仍光速也

故 $vt=-ct$ 而 v 為任何速度

§83 質量與能力之比爲光速平方

一質點若因某種緣由而得有光速之速度則在第四度而在三度中所見為四向散射之光物質化光則質量無存故得有下式

$$m=\beta m_0 \qquad [150]$$

上式 m_0 為靜止質量 m 為運動質量 β 為羅倫茲轉換若 $v=c$ 則 $m=\infty$ 故物至光速則質量無窮大無窮大故無值依牛頓第二定律力等於動量變率命 F 為力如下式

$$F=\frac{mv}{t} \qquad (9)$$

舊說質量為常數依相對論 m,v 皆變值

故 $$F=\frac{\partial(mv)}{\partial t} \qquad (10)$$

$$F=m\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial m}{\partial t} \qquad (11)$$

命 T 為動能 $$T=\int F dx \qquad (12)$$

上式 dx 為力之過程 v 為速度則 $dx=vdt$

故 $$T=\int m\frac{\partial v}{\partial t}vdt+\int v\frac{\partial m}{\partial t}vdt$$

$$=\int mvdv+\int v^2dm \qquad (13)$$

由[150]式得下式 $$dm=\frac{1}{c^2}\frac{m_0vdv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \qquad (14)$$

故 $$T=m_0\int\frac{vdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{m_0}{c^2}\int\frac{v^3dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\cdots\cdots(15)$$

於是 $$T=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+K\cdots\cdots(16)$$

上式 K 為積分常數若 $v=0$ 則 $T=0$

故 $$K=-m_0c^2\cdots\cdots(17)$$

於是有下式 $$T=m_0c^2(\beta-1)\cdots\cdots[151]$$

此為動能方程式其靜止時質量為 m_0 若 $v<<c$

則 $$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\cdots\cdots(18)$$

由〔151〕式 $$T=\tfrac{1}{2}m_0v^2\cdots\cdots(19)$$

由〔150〕〔151〕兩式得下式

$$T=mc^2-m_0c^2\cdots\cdots(20)$$

於是知一物靜止質量為 m_0 若有速度 v 而動能為 T 時則此能力可析為二一者靜止時之能力 m_0c^2 也一者動以 v 之能力 mc^2 也二者變易則吸收能力放射能力故質量 m 能力 E

則 $$E=mc^2\cdots\cdots[152]$$

此相對論之能力慣性方程式也此 m 依〔150〕式則與速度有關由是知質量者能力之一形式於是質量不滅定律歸納於能力不滅定律

由(20)式 $$\frac{T}{c^2}=m-m_0\cdots\cdots[153]$$

此動能當於質量則 T/c^2 也一物動能恆由他物之作用而得之依能力不

滅說也此亦可云有質量等於 T/c^2 者由一物移於別物此復歸於質量不滅之說若一物能力有增量 ΔW 亦可云此物質量有增量 $\frac{\Delta W}{c^2}$ 由愛因斯坦發見物質與能力之一致也自謂相對論之奧秘卽在玆所謂能力慣性說也後又聲稱此爲麥克斯威爾電磁波論久未爲人所識之義蘊無有古於斯者也從易之義能力同於物質則具有慣性其知之甚先矣

第十七章

卐卍化圖引出物質波論基本方程式

§84 引出波羅吉利物質波方程式

由相對論凡物運動速度不得超於光速波羅吉利創物質波論據其說凡運動物體必有相聯之振動故機速 (v) 之外有波速(u) 兩者之乘爲光速(c)之平方於是有下式(§31〔21〕式)

$$vu = c^2 \quad \text{〔21〕}$$

上式爲質波論基本方程式 v 既不得大於光速則 u 必不得小於光速兩速度同在一體殊難索解譬如自動車 (moter car)之速度鮮有過於光速千萬分之一者由〔21〕式之算其相聯之波速約 10^{14} 倍於車速波羅吉利則以光學與水力學所說之羣速 (group-velocity)解

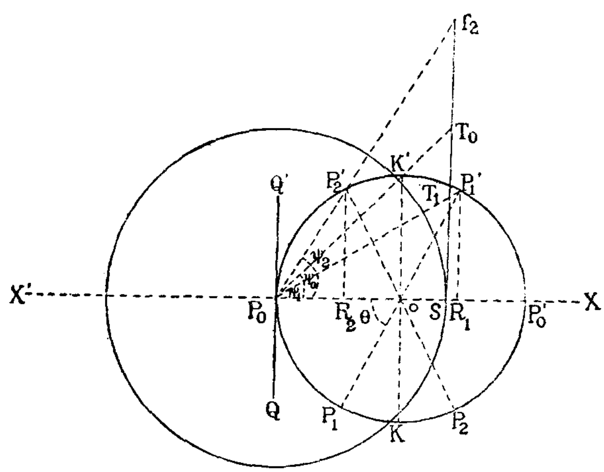


圖 83　卍卐化圖引物質波論

之其說遂通故有下式

$$g=v \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

上式 g 爲羣速而羣速等於機速

余今仍用卐卍化圖引出物質波論基本方程式至於羣速則有可議於後詳說

圖83仍爲圖 81(§81)而增 P_2 於周使 $\angle P_0OP_1$ 與 $\angle P_0'OP_2$ 相等 P_0' 爲 P_0之射影過中心而至周 P_1'爲 P_1 之射影過中心而至周 P_2'爲 P_2 之射影過中心而至周 K 與 K'爲圓周與 Y 軸之交點

命 $\psi_1=\angle P_1'P_0O$ 爲 P_1 點之時間線移於 P_0 變爲 P_0P_1' 而與 P_0 之時間線所成交角(§81)

命 $\psi_2=\angle P_2'P_0O$ 爲 P_2 點時間線移於 P_0 變爲 P_0P_2' 而與 P_0 之時間線所成交角其他命數如圖 81

命　$$ST_1=P_0S\tan\psi_1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$ST_2=P_0S\tan\psi_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由§81〔141〕式得　$$\tan\psi_1=i\frac{v(P_1)}{c} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\tan\psi_2=i\frac{v(P_2)}{c} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

故　$$ic\tan\psi_1=-v(P_1) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$ic\tan\psi_2=-v(P_2) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

因 P 點若在 K 則其時間線 KO 由中心移至周以 P_0 爲坐標中心遂爲 P_0K' 而與 P_0O 之交角爲 $\psi_0=\frac{\pi}{2}$ 故 P 點在 K 是爲光速不過 K 者小於

光速過於K者大於光速而大於光速者是爲波速(u)小於光速者是爲機速(v)因ic爲常數故有下式

$$\frac{P_0S\tan\psi_1}{P_0S\tan\psi_2}=\frac{ic\tan\psi_1}{ic\tan\psi_2} \quad\cdots\cdots(8)$$

於是 $$\frac{ST_1}{ST_2}=\frac{v(P_1)}{v(P_2)} \quad\cdots\cdots(9)$$

因 $$ST_0=P_0S\tan\psi_0 \quad\cdots\cdots(10)$$

$$ST_2>ST_0>ST_1 \quad\cdots\cdots(11)$$

故知 $$v(P_1)=v \text{ 而 } v(P_2)=-u \quad\cdots\cdots(12)$$

上式示$v(P_1)$爲機速故小於光速$v(P_2)$爲波速故大於光速而u與v相反則易其號爲負由(6)(7)(12)三式得下式

$$(ic)^2\tan\psi_1\tan\psi_2=-vu \quad\cdots\cdots(13)$$

而 $$\tan\psi_2=\tan(90^\circ-\psi_1)=\cot\psi_1 \quad\cdots\cdots(14)$$

故 $$(ic)^2\tan\psi_1\tan\psi_2=(ic)^2\tan\psi_1\cot\psi_1=-vu \quad\cdots\cdots(15)$$

於是得下式 $$c^2=vu \quad\cdots\cdots[21]$$

§85 超相對論建立五度時間綫

由§84圖83得有下式

$$P_0P_1'\sin\psi_1=P_1'R_1 \quad\cdots\cdots(16)$$

$$P_0P_2'\sin\psi_2=P_2'R_2 \quad\cdots\cdots(17)$$

因P'_1R_1, $P_2'R_2$皆並行於P_0Q'而P_0Q'爲空間向量

故 $$P_1'R_1=S_1,\quad P'_2R_2=S_2 \quad\cdots\cdots(18)$$

上式 S_1,S_2 皆代表空間向量

因 $$P_1'R_1=OP_1'\sin\theta \quad\text{(19)}$$

$$P_2'R_2=OP_2'\sin\theta \quad\text{(20)}$$

故 $$S_1=S_2 \quad\text{(21)}$$

而 $$S_1=vt_1,\quad S_2=ut_2 \quad\text{(22)}$$

上式因 $S_1=S_2$ 而 $v<u$ 故時間線 t 必異其值乃以 t_1,t_2 分命之由(21)(22)兩式得下式

$$vt_1=ut_2 \quad\text{〔154〕}$$

$$t_1=\frac{u}{v}t_2,\quad t_2=\frac{v}{u}t_1 \quad\text{〔155〕}$$

上式為超相對論重要公式由〔21〕式有下式

$$t_1=\frac{c^2}{v^2}t_2,\quad t_2=\frac{c^2}{u^2}t_1 \quad\text{〔156〕}$$

由〔155〕〔156〕式有下式

$$\left.\begin{aligned} t_2:t_1&=v:u\\ t_2:t_1&=c^2:u^2\\ t_1:t_2&=c^2:v^2 \end{aligned}\right\} \quad\text{(23)}$$

由(21)式〔154〕式命 $S_1=S_2=S$ 則有下式

$$S=vt_1=ut_2 \quad\text{(24)}$$

故 S 為物之行程 t_1 為相聯於 v 之時間線 t_2 為相聯於 u 之時間線 u 之值雖大於光速而以 t_2 之縮小故 ut_2 恆等於 vt_1 二者相守不離 v 之值在公式 $S=vt$ 之中變於 S 不變於 t 而 u 之值在公式 $S=ut$ 之中變於 t 不

變於 S 故作下式

$$v=\frac{S}{t_1},\quad u=\frac{S}{t_2} \qquad \text{〔157〕}$$

而當　$v=u=c$

則　$t_1=t_2=t$ 〔158〕

由上之算 t_1 與 t_2 不同值 t_1 如尋常所說之時間線而 t_2 則由 u 值之大而縮短之時間線 t_1 為四度時間線 t_2 為五度時間線所以謂之五度時間線者下說證之

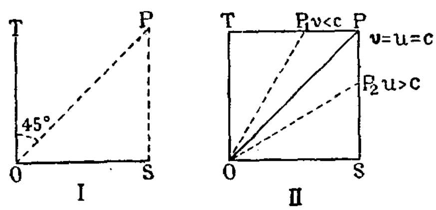


圖84　空間線與時間線

圖84之 I 有物行於 OS 則其時間線為斜線 OP 物止在 O 則時間線為垂直線 OT 物之最大速度莫過於光速則時間線 OP 與靜止時之時間線 OT 為 $45°$ 之角因速度莫大於 c 故 $\angle TOP$ 不得大於 $45°$

假定有速度不小於光速其時間線起自 OP 而最大值則至 OS 卽自光速至無窮大此速度卽波速 u

凡物動靜相對之說也故動者自視若靜而視靜者為動於相反之向苟其自視若靜矣則其時間線恆為垂直有物焉自 O 至 S 以速度 v 然而自視若靜則 SP 為其自視之時間線而 SP 者等於 OT 然自 O 處視之則為斜線 OP 由是縱線為時間線橫線為空間線而斜線為空時線

圖 84 之 II 若質點之行為光速則 OP 對於時間線與空間線均成 $45°$ 之角若質點之行為 v 則空時線為 OP_1 而 $v<c$ 若質點之行為 u 則空時線為 OP_2 而 $u>c$ 若一質點兼有此兩種速度則 OP 析而為兩線一為 OP_1

一爲 OP_2 而 $\angle P_2OP=\angle P_1OP$ 當 v 值自 O 而至 c 則 P_1 在空間線上自 T 而至 P 當 u 值自 ∞ 而至 c 則 P_2 在時間線上自 S 而至 P 故 P_1 之變爲空間線上之變而 P_2 之變爲時間線上之變 P_1 之在 T 是無速度 P_2 之在 S 是無時間其動之値無窮大但無時間是以無動之動

凡謂動者長度之變率也今有長度不變而變於時間之動此在尋常之意識則固未嘗動是故謂之無動之動

圖 84 之 II 當 $v=u=c$ 時 OP_1, OP_2 合一而在 OP 當 $v=0,u=\infty$ 時 OP_1,OP_2 爲垂直今若反其方使 $v=0,u=\infty$ 時兩線合一而當 $v=u=c$ 時相與垂直示之圖85

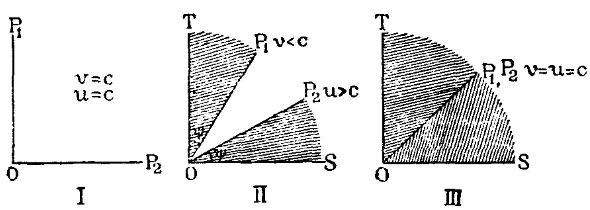


圖85　闢戶爲乾闔戶爲坤

圖85 I 闢戶謂之乾 III 闔戶謂之坤乾爲光速坤作成物而II在闢闔之際 $\angle TOP_1=\angle SOP_2=\psi$ 與明哥斯基雙曲線相應(§64 圖 59) 故 OP_1 爲時間向量 OP_2 爲空間向量由三五相等定理 OP_1 爲四度時間線而 OP_2 不得不謂之五度時間線焉

五度時間線之建立物理學之原理表之在公式者得以簡單化之矣

§86　波羅吉利之算

波羅吉利之算余略述之如次一切波動苟注視波路上之一點皆可視爲一種來復動以下式書之

$$\psi = A \sin \theta \quad \cdots\cdots (25)$$

上式 ψ 爲與 Y 軸並行之一變量 θ 爲振相 A 爲振幅而波行之向沿 X 軸復作下式

$$\psi = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad \cdots\cdots (26)$$

上式 T 爲週期卽轉 2π 之時間 t 爲轉 θ 角之時間而振數 ν 爲週期 T 之倒數故有下式

$$\psi = A \sin 2\pi\nu t \quad \cdots\cdots [159]$$

在 t 時任意一點 x 之振動情形得之下式

$$\psi = A \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{u}\right) \quad \cdots\cdots [159]_a$$

上式卽§45〔64〕式 u 爲波速通常情形另加一常數 ε 乃如下式

$$\theta = 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varepsilon \quad \cdots\cdots [159]_b$$

一羣振數在一定範圍內之波動謂之羣波羣波之特性卽全部可能角度之正弦平均值爲零蓋有一正弦之正值必有一負值與之相消一羣振數其振相不全相符則振動(振幅與相應振相正弦乘積之總和)與振幅之代數和相較爲一極小值若注視羣波中之一點在此則振相符合情形爲較善者則振動情形亦較大因此以能力密度與四周相較爲一極大值故稱爲羣波之能力中心若有兩波其振相僅差一無限小值則振相差爲次階可略小數易言之在能力中心振相依振數之微分商等於零因書下式

$$\frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 \quad \cdots\cdots (27)$$

由〔159〕$_b$ 式得下式

$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu}=2\pi t-2\pi x\frac{\partial\left(\frac{\nu}{u}\right)}{\partial\nu}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nu}=0 \quad\cdots\cdots(28)$$

$$2\pi x\frac{\partial\left(\frac{\nu}{u}\right)}{\partial\nu}=2\pi t+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nu} \quad\cdots\cdots(29)$$

故

$$x=\frac{1}{\frac{\partial\left(\frac{\nu}{u}\right)}{\partial\nu}}\left(t+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nu}\right) \quad\cdots\cdots(30)$$

由上式可知 x 一量依時而變卽能力中心亦自變動若命其速度爲 g 則下式書之

$$\frac{1}{g}=\frac{\partial\left(\frac{\nu}{u}\right)}{\partial\nu} \quad\cdots\cdots(31)$$

上式 g 爲羣波之速度由〔21〕式得下式

$$\frac{\nu}{u}=\frac{\nu v}{c^2} \quad\cdots\cdots(32)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\nu}{u}\right)}{\partial\nu}=\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\nu v}{c^2}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial\nu}(\nu v)=\frac{1}{c^2}\left(v+\nu\frac{\partial v}{\partial\nu}\right) \quad\cdots\cdots(33)$$

由相對論　$\nu=\beta\nu_0$ $\cdots\cdots(34)$

上式 ν_0 爲隨物運動之坐標系而言之振數

$$\frac{\partial\nu}{\partial v}=\frac{\nu_0 v}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}=\frac{\nu v}{c^2-v^2} \quad\cdots\cdots(35)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\nu}{u}\right)}{\partial\nu}=\frac{v}{c^2}+\frac{\nu}{c^2}\frac{c^2-v^2}{\nu v}=\frac{1}{v} \quad\cdots\cdots(36)$$

由(31)式得(1)式　　$g=v$ ……………………………………(1)

§87　羣波之說勿用

若兩波並行其波長差一無限小值則兩波峯同至一點時爲相益而成兩倍之高峯一波峯與一波谷同至一點時爲相消而無峯谷若羣波峯谷相益相消可得一狹小之區衆峯重疊而爲狹高之峯此謂之能力乘希魯汀格能算一狹小區域特性振動之重疊可得一較高較狹之峯此峯前後移動一如振動體在某種情形之下此能力乘結聚相當之久長雖仍繼續進展其可見之分解不越能注意之程度

衆峯重疊其最大值之所在亦卽質點所在然希魯汀格以爲在原子之情形無復質點行程之可言蓋一羣振幅之萃止近乎最大值之區必有數種波長之不同而所謂質點者無復能爲點是故原子之中電子之軌道與其位置實亦無從說之雖然則有過焉蓋原子廣袤約 10^{-8}cm. 而能吸收量子發射於紫外光者大於其體踰千倍如是則能力所萃之區不得不視之爲點此難題希魯汀格以爲不可解也

超相對論之義五度時間線與四度時間線則有辨焉前者與波速相聯繫後者與機速相聯繫波速之值雖大於機速而波速與五度時間線之乘恆等於機速與四度時間線之乘二者相守曾勿有離披因是之故羣波之誼無所用於此固無患於電力質點之不能集中亦不虞波峯波谷結合之久與暫也

第十八章

五度時間線攝提物理學基本原理諸公式

§88 物理學基本原理

最小作用之原理爲物理學之基本此原理之徵有種種形式而最早發見爲亞力山大賚之赫魯 (Hero of Alexandria) 說在光之返射凡自光源至鏡自鏡至目其所行程爲需時之最短者而他程之時均不能較之爲短赫魯爲希拉之幾何學與物理學者其著作約在第一世紀之中葉而後世有赫魯其人亦幾何學者(A.D. 938)以爲辨別故著其地

二次發見在十七世紀斐馬 (Fermat) 用最短光時之方式表明之自甲點至乙點光程所過較諸他程爲需時之最短若自空氣中一點至水中一點光之取徑爲一切塗徑需時最短者而毋忘光在水中之速率緩於在空氣中在不勻媒質中速度隨處異而可分程爲極小段每段以相應速度除之取其總和在算學術語謂之速度倒數之線積分取之A,B之間式如次

$$\int_A^B \frac{ds}{u} = \text{極小值} \qquad (1)$$

三次發見在動力學十八世紀莫布脫夷作之 (Maupertuis) 曰運動物體自 A 至 B 其機速之線積分爲一極小值謂之最小工作原理

$$\int_A^B v\,ds = \text{極小值} \qquad (2)$$

莫氏之言曰自然與人無殊賦有惰性恆刻意其工作之少至最小之限度動力學一切理論得有證明由此原理也

自茲而後歐勢(Euler)拉格蘭奇 (Lagrange) 疊有修明而哈密爾登(Hamilton)集其成

凡此種種物理學之基本余將以超相對論五度時間線之建立通其算俾識其根本所由而化之爲一

§89 五度時間線使相對論與波動力學兩者基本公式化爲一致

前由卐卍化圖引出相對論基本方程式(§81)其式如次

$$x'=\beta(x-vt),\ y'=y,\ z'=z,\ t'=\beta(t-vx/c^2) \quad \text{[144]}$$

由超相對論公式〔156〕$t_1=\dfrac{c^2}{v^2}t_2$ (§85)

故〔144〕式之 t' 爲下式

$$t'=\beta(t_1-\frac{v}{c^2}vt_1)=\beta(t_1-t_2) \quad \text{[160]}$$

上式 t_1 爲四度時間線 t_2 爲五度時間線由超相對論公式〔155〕$t_2=\dfrac{v}{u}t_1$ 故上式爲下式

$$t'=\beta(t_1-\frac{v}{u}t_1)=\beta(t_1-\frac{x}{u}) \quad \text{(3)}$$

上式與波動力學基本公式〔159〕$_a$ (§86)比較

$$\psi=A\sin 2\pi\nu(t-\frac{x}{u}) \quad \text{[159]}_a$$

則得

$$\psi=A\sin 2\pi\nu(t_1-t_2) \quad \text{[161]}$$

羅倫茲轉換式依超相對論公式書之如次

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\left(\frac{t_1}{t_1-\frac{v^2}{c^2}t_1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{t_1}{t_1-t_2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad\cdots\cdots(4)$$

故

$$\beta^2=\frac{t_1}{t_1-t_2} \quad\cdots\cdots[162]$$

設有物體對坐標系x,y,z,t之速度爲v而此物體對坐標系x',y',z',t'爲不動故加撇者對不加撇者以v速度運動(假定沿x軸)於是對加撇者言振動方式如次

$$\psi=A\sin 2\pi\nu' t' \quad\cdots\cdots(5)$$

由[161][162]式則

$$\psi=A\sin 2\pi\nu\left(\frac{t_1}{\beta^2}\right) \quad\cdots\cdots(6)$$

因　$t_1=\beta t_1'$ 而 $\beta v'=\nu$

故(6)式爲下式

$$\psi=A\sin 2\pi\nu' t'_1 \quad\cdots\cdots(5)_a$$

於是知$[159]_a$式與(5)式相中而任何運動物體必有相之聯波動其傳佈速度對光速言則爲機速之倒數而$u=\frac{S}{t_2}$故波動力學與相對論爲一致

§90　引出斐馬原則與莫布脫奕原則

波羅吉利振相速度(U)之算其所謂波射線者垂直於同振相之面(Ψ)也(§31)

$$\psi(x,y,z,t)=C\cos 2\pi\nu\left[t-\int\frac{dr}{u}\right] \quad\cdots\cdots[24]$$

上式方括弧中$\int\frac{dr}{u}$之值卽波射線由§86$[159]_a$式及§89[161]式則知

$\int \frac{dr}{u}$亦卽 t_2 而爲五度時間線

斐馬公式之 ds 易之以 dr 於義無殊故§88(1)式作如下

$$\int_A^B \frac{dr}{u} = \text{極小値} \cdots\cdots (1)_a$$

卽

$$\delta \int_A^B \frac{dr}{u} = 0 \cdots\cdots [163]$$

由超相對論之義斐馬公式卽五度時間線

若命 $W = h\nu,\ p = \frac{h\nu}{u}$ ……(7)

上式 W 爲能力 h 爲博郎克常數 p 爲動量 u 爲波速第一式出於光量子之義而第二式導誘於第一取於不變值(invariance)之義由此兩式則在 dt 之時間沿波射線而取 dr 之長其振相之變比例哈密爾登作用量之變作如下式

$$2\pi\nu\left(dt - \frac{dr}{u}\right) = \frac{2\pi}{h}(Wdt - pdr) \cdots\cdots (8)$$

故在不變之場其射程之形式以莫布脫夷原則決定之

$$\delta \int_A^B pdr = 0 \cdots\cdots [164]$$

於是亦引出莫布脫夷原則

§91 引出雅谷弼公式

由〔161〕式則〔24〕式書爲下式

$$\psi(x,y,z,t) = C \cos 2\pi\nu(t_1 - t_2) \cdots\cdots [165]$$

命

$$\mathfrak{S} = Wt_2 \cdots\cdots [166]$$

則得　$$\psi(x,y,z,t)=C\cos\frac{2\pi}{h}(Wt_1-\mathfrak{S})\text{…………〔167〕}$$

上式 $\mathfrak{S}$ 爲作用量而爲能力乘時間者其時間爲五度時間線 t_2

由(8)式則　$$\mathfrak{S}=pdr\text{…………〔168〕}$$

故　p_x,p_y,p_z 爲 $\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x}$，$\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y}$，$\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial z}$ 於是能力公式如次

$$f(x,y,z,p_x,p_y,p_z)=0\text{…………〔77〕}_a$$

上式卽§56〔77〕式若 p_x,p_y,p_z 代以 $K\frac{\partial}{\partial x}$，$K\frac{\partial}{\partial y}$，$K\frac{\partial}{\partial z}$ 而 K 爲哈生保常數如下式

$$K=\frac{h}{2\pi i}\text{…………〔169〕}$$

於是動能爲下式

$$T=\frac{1}{2m_0}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)=\frac{K^2}{2m_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\text{…………(9)}$$

E 爲全能 V 爲勢能則有下式

$$\frac{K^2}{2m_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V-E=0\text{…………(10)}$$

而　$$K^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)=-\frac{h^2}{4\pi^2}\Delta\text{…………(11)}$$

上式 Δ 爲拉普拉斯導誘係數故(10)式如下

$$\left\{-\frac{h^2}{8\pi^2m_0}\Delta+V-E\right\}\psi=0\text{…………(12)}$$

於是引出希魯汀格方程式(§45)

$$\Delta\psi+\frac{8\pi^2m_0}{h^2}(E-V)\psi=0\text{…………〔69〕}$$

由§31(3)式爲蜿蜒波之解如下式

$$\psi(x,y,z,t)=Ce^{2\pi i\nu t}\,e^{2\pi i\varphi} \quad\cdots\cdots(13)$$

而命
$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{h}\mathfrak{S}(x,y,z) \quad\cdots\cdots(14)$$

以(13)式代入〔69〕式則得下式

$$\frac{1}{2m_0}\Sigma\left(\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x}\right)^2+V=E \quad\cdots\cdots〔170〕$$

上式爲雅谷夠公式而同於(10)式

§92 引出波耳量子論公式

波耳第一定律 (Bohr 1913) 曰惟有 2π 乘角動量等於單位作用量子之整倍數之圓軌道纔屬可能示如下式

$$mr^2\omega=\tau\frac{h}{2\pi} \quad\cdots\cdots〔171〕$$

上式 mr^2 爲旋動慣性 ω 爲角速度 $mr^2\omega$ 爲角動量 τ 爲整數 h 爲單位作用量子

$$\oint pdq=\tau h \quad\cdots\cdots〔171〕_a$$

上式$\oint$爲閉合軌道線積分因$p=mv$ 而 $v=\omega r$, dq 相當於 dr 故上兩式爲一致

索麥斐爾特 (Sommerfeld 1915) 發見在電子軌道爲橢圓時有引用第二量子數以規定角動量之要於是動量之分向有二其一爲離心分向 (p_r) 其二爲角動分向 (p_φ) 如下式

$$p_r=m\dot{r} \quad\cdots\cdots(15)$$

$$p_\varphi=mr^2\dot{\varphi} \quad\cdots\cdots(16)$$

於是波耳之式亦析之以爲二

$$\oint p_r dr=\tau_r h,\quad \oint p_\varphi\, d\varphi=\tau_\varphi\, h \quad\cdots\cdots(17)$$

上式 τ_r 爲離心分向量子數 τ_φ 爲角動分向量子數而 τ 爲主量子數故如下式

$$\tau=\tau_r+\tau_\varphi \quad\cdots\cdots(18)$$

由余之算根據二四同功定理則量子之值有空時向量與空間向量兩組之系統前者以垂直於圓平面之向代表之而後者以圓平面之側視若直線代表之而二者必須分辨 τ 之爲主量子乃屬空間向量故以電子自旋平面之側視線著之由是推算則(17)式之 τ_r 與 τ_φ 當易書之在此余不及道其詳而已述於拙著綜合物理學

$$\oint p_r dr=\tau_\varphi\, h,\quad \oint p_\varphi\, d\varphi'=\tau_r h \quad\cdots\cdots〔172〕$$

而(18)之 τ 當爲 §79〔138〕式之 τ_h 若電子自旋平面垂直於軌道平面則〔137〕式之 τ_H 等於零而 $\tau=\tau_h$ 於是(18)式方爲合符索麥斐爾特未命 τ_H 之量子數是不及於三度也

依§86〔159〕$_b$ 式作下式

$$\varphi'=2\pi\nu\left(t-\frac{r}{u}\right)+\varepsilon \quad\cdots\cdots〔159〕_b$$

故

$$d\varphi'=-2\pi\nu\frac{dr}{u} \quad\cdots\cdots(19)$$

$$\varphi_1'=\varphi_2'-2\pi\int_A^B \nu\,\frac{dr}{u} \quad\cdots\cdots(20)$$

當 φ_1',φ_2' 合一時　$\sin\varphi_2'=\sin\varphi_1' \quad\cdots\cdots(21)$

故

$$\rho_1'=2\pi n \quad\cdots\cdots(22)$$

上式 n 爲整數故　$$n=\oint\frac{\nu dr}{u}\qquad\text{〔173〕}$$

$$\oint d\varphi'=2\pi\oint\frac{\nu dr}{u}\qquad(23)$$

因　$$p=mv=\frac{h\nu}{u}$$

故　$$\oint pd\varphi'=2\pi\oint\frac{\nu dr}{u}\frac{h\nu}{u}=2\pi n\frac{h\nu}{u}\qquad(24)$$

因　$\lambda=2\pi r$　故　$2\pi=\frac{\lambda}{r}$

於是　$$\oint pd\varphi'=\frac{\lambda}{r}n\frac{h\nu}{u}\qquad(25)$$

因　$\lambda=\frac{u}{\nu}$　故　$$\oint pd\varphi'=\frac{n}{r}h\lambda\frac{1}{\lambda}=\frac{n}{r}h\qquad(26)$$

但　$P_\varphi=mr^2\omega$ 而 $v=\omega r$

故　$$\oint p_\varphi d\varphi'=nh\qquad(27)$$

上式書 n 爲 τ_r 則得〔172〕$_a$ 式

$$\oint p_\varphi d\varphi'=\tau_r h\qquad\text{〔172〕}_a$$

由〔173〕式　$$\oint dr=n\frac{u}{\nu}\qquad\text{〔173〕}_a$$

而　$h\nu=muv$　故　$$\oint dr=n\frac{h}{mv}\qquad(28)$$

於是　$$mv\oint dr=nh\qquad(29)$$

上式書 $p_r=mv$ 書 n 爲 τ_φ 則得〔172〕$_b$ 式

$$\oint p_r dr=\tau_\varphi h\qquad\text{〔172〕}_b$$

復因$\oint dr=2\pi r$故(29)式書n爲τ得下式

$$mr^2\omega=\tau\frac{h}{2\pi} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots〔171〕$$

上式爲波耳第一定律由〔171〕〔172〕〔173〕式知量子成於t_2而爲五度時間線

第十九章

五度時間線攝提綜合動力學

§93　虛速度定義

綜合動力學者 (Dynamics of generlized coordinates) 亦謂之解析動力學(Analytical dynamics)作於拉格蘭奇 (Lagrange) 於物理學最爲基本動力學者 (Dynamic from Gr. δῦναμις strength)與靜力學 (Statics) 對稱也綜合動力學之興也凡力之作用施之於物或動或靜兼而存焉動靜之畛於茲泯矣

先是虛速度之義作於布納里(Johann Bernoulli, 1717)繼之乃有亞倫伯定義 (d'Alembert's Principle 1743) 此爲綜合動力學之先河說之如次

凡力施諸質點質點因之而動其行無所障礙謂之自由運動(freedom of motion)式如次

$$K = mb \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

上式K爲合力由諸力之合而施之於質點 b 爲質點受力而有其實際之加速度

若質點行動之自由受制於其他情形或起於質點間之互相制或由於

一質點之行動不得離開某一平面或某一曲線則 (1) 式不足用今若有質點雖受施力而仍留於平衡狀態 (in equilibrium in a definite position) 則其行動有制也去其所制力固使之動矣假定此動移之鄰位爲一無限小之距 (to a definite adjacent position at an infinitesimal distance therefrom) 於是動能作而功乃成 (work done)

所謂虛速度者(a virtual velocity)亦曰虛移(a virtual displacement) 爲一質點自本位移之鄰位爲無限短距 抑未嘗去其所制是故無功之成而虛移者不繫於時間爲一向量而表之以 δs 其分向 $\delta x,\delta y,\delta z$ 施力爲 K 其分向 X,Y,Z 有下式

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

在平衡狀態下式示之

$$\sum_{h=1}^{h=n} K_h\delta s_h=0 \quad\cdots\cdots[174]$$

$$\sum_{h=1}^{h=n}(X_h\delta x_h+Y_h\delta y_h+Z_h\delta z_h)=0 \quad\cdots\cdots[174]_a$$

上式爲布納里虛速度定義

若有施力於質點其行動之自由有所制特不爲虛速度定義之所示非平衡狀態而特出諸有限制之行動亞倫伯定義爲此而作之其義曰在有限制之動其實際加速度之向爲須此辨卽力之施於質點在此向者陳其效果一若質點之行動完全自由

在有限制之動施力 K 非等於 mb 或向或量但須增一伴力 (the accessory force) 之向量和於 mb 命 P 爲伴力有下式

$$mb = K + P \qquad \cdots\cdots(3)$$

在一體系其間諸質點爲有限制之動則伴力者視爲作用於諸質點而在行動中爲平衡狀態此亞倫伯定義之實際意義也更爲下式

$$V = -mb + K \qquad \cdots\cdots(4)$$

上式 V 謂之遯力在有限制之動施力 K 之全效不可得見而必有所失其羨乃爲 mb 此所失者爲遯力遯力不復有加速度於質點但當其爲獨施則遯力與伴力爲相等而向相反於是亞倫伯定義可作如下說凡力之遯力分向在於一體系者在行動中時時爲平衡 (in equilibrium at every moment during the motion)

若遯力於行動中時時爲平衡拉格蘭奇(1788)首見其可以代虛速度定義公式(〔174〕式)中之施力而得關於行動之普徧公式如次

$$\sum_{h=1}^{h=n}\{(K_h - m_h b_h)\,\delta s_h\} = 0 \qquad \cdots\cdots[175]$$

$$\sum_{h=1}^{h=n}\left\{(X_h - m_h\frac{\partial^2 x_h}{\partial t^2})\,\delta x_h + (Y_h - m_h\frac{\partial^2 y_h}{\partial t^2})\,\delta y_h + (Z_h - m_h\frac{\partial^2 z_h}{\partial t^2})\,\delta z_h\right\} = 0 \qquad \cdots\cdots[175]_a$$

§94 拉格蘭奇公式之初階形式

一體系之行動自由受制於 m 方程式此體系用 $3n$ 坐標於是施力不具於 m 式中而 m 式者不繫於時間凡式不繫時間則謂之結合型 (Scleronomous) 而繫時間者則謂之流動型 ([illegible]s) m 式者可以下式

示之

$$G_i(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2\cdots x_n,y_n,z_n)=0 \quad i=1,2\cdots m \quad \cdots\cdots(5)$$

此體系自由度之數 (the number of degrees of freedom) 爲 s 而 $s=3n-m$ 故完全自由者謂自由度之數與坐標等也而有一式則減一自由度故獨立式之數若等於坐標遂爲無動矣

若 $\varphi(u,v,\omega)$ 爲變數 u,v,ω 之涵數則以下式作之

$$\delta\varphi(u,v,\omega)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\delta v+\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\delta\omega \cdots\cdots(6)$$

故(5)式爲下式

$$\sum_{h=1}^{h=n}\left\{\frac{\partial G_i}{\partial x_h}\delta x_h+\frac{\partial G_i}{\partial y_h}\delta y_h+\frac{\partial G_i}{\partial z_h}\delta z_h\right\}=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

若 m 式之每一式皆以一未定數 λ_i 乘之而加之於〔175〕式則爲下式

$$\sum_{h=1}^{h=n}\left\{(X_h-m_h\frac{\partial^2 x_h}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial x_h})\delta x_h\right.$$

$$+(Y_h-m_h\frac{\partial^2 y_h}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial y_h})\delta y_h$$

$$\left.+(Z_h-m_h\frac{\partial^2 z_h}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial z_h})\delta z_h\right\}=0\cdots\cdots(8)$$

上式雙括弧中每項之值皆等於 0 故作下式

$$\left.\begin{aligned}m_h\frac{\partial^2 x_h}{\partial t^2}&=X_h+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial x_h}\\ m_h\frac{\partial^2 y_h}{\partial t^2}&=Y_h+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial y_h}\\ m_h\frac{\partial^2 z_h}{\partial t^2}&=Z_h+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial z_h}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots〔176〕$$

上式為拉格蘭奇公式之初階形式與(3)式比較之則知$\Sigma\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial x_h}$者相當於伴力也$x,y,z$三分向之伴力與$X,Y,Z$三分向之施力作用於$h^{th}$質點使此體系為有限制之動而非完全自由之動

§95　哈密爾登原則

一體系之質點有質量$m_1,m_2\cdots m_n$使質點之坐標為$x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2\cdots x_ny_nz_n$而$t$為時間設質點皆運動於力之場中而此力之場由質點間互相作用而起於是在此體系兼有動能與勢能假定總能力為常數勢能僅繫於質點之位置而不繫於時間於是動能如下式

$$2T=\Sigma m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\cdots\cdots(9)$$

為便利故以$\Sigma m\dot{x}^2$代表$\Sigma m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$而勢能$V$為諸質點坐標之涵數

假定有一代表點運行於$3n$度之理想空間n為質點總數命A,B為代表點行程上之兩點t_A為此點在A之時間t_B為在B之時間依哈密爾登原則書如下式

$$\delta\int_{t_A}^{t_B}(T-V)dt=0\cdots\cdots〔177〕$$

上式δ之記號為極微之變動自實際行程A至B變至另一程線而相距極近此至微之變可不繫於時間卽行程上之每一點有一相應之點在變程之上而兩點之時間相同

因　$$T=\tfrac{1}{2}\Sigma m\dot{x}^2\ \text{故}\ \delta T=\Sigma m\dot{x}\delta\dot{x}\cdots\cdots(10)$$

力之x分向在質點者為$m\ddot{x}$故有下式

$$-\delta V=\Sigma(m\ddot{x}\delta x+m\ddot{y}\delta y+m\ddot{z}dz)\cdots\cdots(11)$$

而簡書之 $$-\delta V=\Sigma m\ddot{x}\delta x\cdots\cdots(12)$$

故 $$\delta T-\delta V=\Sigma m\dot{x}\delta\dot{x}+\Sigma m\ddot{x}\delta x\cdots\cdots(13)$$

因 $$\frac{\partial}{\partial t}(m\dot{x}\delta x)=m\ddot{x}\delta x+m\dot{x}\delta\dot{x}\cdots\cdots(14)$$

故 $$\delta T-\delta V=\frac{\partial}{\partial t}\Sigma m\dot{x}\delta x\cdots\cdots(15)$$

於是因 $\delta(dt)=0$ 而有下式

$$\delta\int_{t_A}^{t_B}(T-V)dt=\int_{t_A}^{t_B}(\delta T-\delta V)dt=\int_{t_A}^{t_B}\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma m\dot{x}\delta x)dt\quad(16)$$

故 $$\delta\int_{t_A}^{t_B}(V-T)dt=[\Sigma m\dot{x}\delta x]_{t_A}^{t_B}\cdots\cdots(17)$$

但行變兩程在 A,B 兩點爲合一故在此兩點凡 $\delta x,\delta y,\delta z$ 皆爲零由是

$$\delta\int_{t_A}^{t_B}(T-V)dt=0\cdots\cdots[177]$$

全能 E 爲 $T+V$ 故 $T-V=2T-E$ 而有下式

$$\delta\int_{t_A}^{t_B}(T-V)dt=\delta\int_{t_A}^{t_B}2Tdt-\delta\int_{t_A}^{t_B}Edt\cdots\cdots(18)$$

但 E 爲常數故 $$\int_{t_A}^{t_B}Edt=E(t_B-t_A)\cdots\cdots(19)$$

因 $\delta t=0$ 故 $$\delta\int_{t_A}^{t_B}Edt=0,\ \delta\int_{t_A}^{t_B}2Tdt=0\cdots\cdots[178]$$

上式直接得之於哈密爾登原則而謂之最小作用原則 $\int_{t_A}^{t_B}2Tdt$ 謂之作用

因 $2T=mv^2$ 而 $vdt=ds$ 故得莫布脫夷原則(§90)如下式

$$\delta\int_A^B mvds=0\cdots\cdots[164]$$

拉格蘭奇公式

拉格蘭奇公式可得以哈密爾登原則算之命 q_i $(i=1,2,\cdots s)$ 代表 s 綜合坐標在某一體系者而 n 質點之一之直交坐標 (orthogonal coordinates) 視爲綜合坐標 (generalized coordinates) 之涵數示爲下式

$$x_h=\varphi_h(q_1,q_2,\cdots q_s) \quad \cdots\cdots\cdots [179]$$

若以綜合坐標表哈密爾登公式中之動能則必微分 $3n$ 公式([179]式)而依於時間然後自乘又以質量乘之而取總和故作下式

$$\dot{x}_h=\frac{\partial x_h}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial x_h}{\partial q_2}\dot{q}_2+\cdots\frac{\partial x_h}{\partial q_s}\dot{q}_s \quad \cdots\cdots\cdots (20)$$

而

$$\dot{x}_h^2=\left(\frac{\partial x_h}{\partial q_1}\right)^2\dot{q}_1^2+\left(\frac{\partial x_h}{\partial q_2}\right)^2\dot{q}_2^2+\cdots\left(\frac{\partial x_h}{\partial q_s}\right)^2\dot{q}_s^2$$

$$+2\frac{\partial x_h}{\partial q_1}\frac{\partial x_h}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2+\cdots 2\frac{\partial x_h}{\partial q_1}\frac{\partial x_h}{\partial q_s}\dot{q}_1\dot{q}_s$$

$$+2\frac{\partial x_h}{\partial q_2}\frac{\partial x_h}{\partial q_3}\dot{q}_2\dot{q}_3+\cdots 2\frac{\partial x_h}{\partial q_2}\frac{\partial x_h}{\partial q_s}\dot{q}_2\dot{q}_s+\cdots \quad \cdots\cdots\cdots (21)$$

書之下式

$$\dot{x}_h^2=\sum_{i=1}^{i=s}\sum_{k=1}^{k=s}\frac{\partial x_h}{\partial q_i}\frac{\partial x_h}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_k \quad \cdots\cdots\cdots (22)$$

乘質量而積加得動能(命 L 爲動能)如下式

$$2L=\sum_{i=1}^{i=s}\sum_{k=1}^{k=s}A_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \quad \cdots\cdots\cdots (23)$$

而

$$A_{ik}=\sum_{h=1}^{h=n}m_h\left[\frac{\partial x_h}{\partial q_i}\frac{\partial x_h}{\partial q_k}+\frac{\partial y_h}{\partial q_i}\frac{\partial y_h}{\partial q_k}+\frac{\partial z_h}{\partial q_i}\frac{\partial z_h}{\partial q_k}\right] \quad \cdots\cdots\cdots (24)$$

係數 A_{ik} 繫於綜合坐標之值([179]式)而對於其時間導誘值則完全獨立後者謂之綜合速度記之以 $\dot{q}$

由 (23) 式則動能爲綜合速度之調　　　a homogeneous

quadratic function) 故可視為 $2s$ 變數 $q_1q_2,\cdots q_s,\ \dot{q}_1,\dot{q}_2\cdots\dot{q}_s$ 之涵數故動能之變作於哈密爾登之公式為下式

$$\delta L=\sum_{i=1}^{i=s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)\cdots\cdots(25)$$

勢能則不然惟繫位置不繫時間故可全依 s 綜合坐標而定因此體系僅有 s 自由度也而對於綜合速度則獨立故有下式

$$\delta V=\sum_{i=1}^{i=s}\frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i\cdots\cdots(26)$$

以(25) (26)兩式作於哈密爾登公式而用下式之關係示時間不受變數之影響

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta x)=\delta\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\cdots\cdots(27)$$

則得 $$\sum_{i=1}^{i=s}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial}{\partial t}(\delta q_i)\right\}dt=0\cdots\cdots(28)$$

部分積分左邊第二項則先使之完全微分式

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial}{\partial t}(\delta q_i)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)-\delta q_i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\cdots\cdots(29)$$

乘 dt 而積分於 t_1,t_0 之間為下式

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial(\delta q_i)}{\partial t}dt=\left|\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\delta q_i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)dt\cdots\cdots(30)$$

若情形必須符合哈密爾登公式則上式右邊第二項消滅而由定義在 t_1,t_0 之坐標無所變

故 $$\sum_{i=1}^{i=s}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i dt=0\cdots\cdots(31)$$

綜合坐標既爲互相獨立故可於 δq_i 之變值任取其一而不關於其他綜合坐標之變故由適當選擇可使積分記號後之值不爲負數又因 δq_i 不爲零故方括號之值必爲零於是關於運動之 s 特殊公式爲下示

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=-\frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad i=1,2,\cdots s \quad \cdots\cdots\cdots\cdots [180]$$

上式爲拉格蘭奇公式而與其初階形式(§94〔176〕式)爲符合

力之直交分向 (rectangular components) 作用於體系者以其勢能之部分導誘依於直交坐標者 (rectangular coordinates) 代表之而用負號是故勢能之部分導誘依於綜合坐標而變其號者亦爲綜合力 (the generalized force) 之分向若夫動能之部分導誘而依於綜合速度者 (the generalized velocties) 則稱之爲此體系之綜合動量 (the generalized momenta of the system)

§97 哈密爾登典型公式

微分(23)式依於一綜合速度 $\dot{q}_h$ 凡足指數 i,k 之異於 h 者消之而同於 h 者其值則倍之得下示之關係

$$2\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=2\sum_{k=1}^{k=s}A_{ik}\dot{q}_k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (32)$$

由(23)式
$$2L=\sum_{i=1}^{i=s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (33)$$

命綜合動量爲 p_i 則
$$2L=\sum_{i=1}^{i=s}p_i\dot{q}_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (34)$$

由上式則動能全依綜合坐[illegible]及動量而[illegible]式動能全依綜合坐

標及速度而定之今皆作之

$$L=F(q_i,\dot{q}_i,) \cdots\cdots (35)$$

$$L=G(p_i,q_i) \cdots\cdots (36)$$

因　$p_i=\dfrac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}$故得　$$dL=\Sigma\left\{\frac{\partial F}{\partial q_i}dq_i+p_i d\dot{q}_i\right\} \cdots\cdots (37)$$

另一方面　$$dL=\Sigma\left\{\frac{\partial G}{\partial p_i}dp_i+\frac{\partial G}{\partial q_i}dq_i\right\} \cdots\cdots (38)$$

兩式相加得下式

$$2dL=\Sigma\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}+\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)dq_i+p_i d\dot{q}_i+\frac{\partial G}{\partial p_i}dp_i\right\} \cdots\cdots (39)$$

由(34)式　$$2dL=\Sigma\,(p_i d\dot{q}+\dot{q}_i dp_i) \cdots\cdots (40)$$

減(40)式於(39)式得下式

$$\Sigma\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}+\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)dq_i+\left(\frac{\partial G}{\partial p_i}-\dot{q}_i\right)dp_i\right\}=0 \cdots\cdots (41)$$

因變數 p_i 與 q_i 互相獨立故(41)式惟圓括弧中之值皆消而得下式

$$\frac{\partial G}{\partial q_i}=-\frac{\partial F}{\partial q_i} \cdots\cdots (42)$$

$$\dot{q}_i=\frac{\partial G}{\partial p_i} \cdots\cdots (43)$$

由〔180〕式動能 L 視爲 q 與 $\dot{q}$ 之涵數故爲引涵數 G 而用 (42) 式則書〔180〕式如次

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}=-\frac{\partial (G+V)}{\partial q_i}\qquad i=1,2,\cdots s \cdots\cdots (44)$$

上式$(G+V)$但爲能力而爲 p 與 q 之涵數此綜合坐標與綜合動能之涵數代表能力而稱之. 數記之以 因勢能惟繫坐標故作下式

$$H=G(q,p)+V(q) \cdots\cdots [181]$$

故有
$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{\partial G}{\partial p_i} \cdots\cdots (45)$$

由(43)(44)式得下式
$$\frac{\partial q_i}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{\partial p_i}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \cdots\cdots [40]。$$

上式爲哈密爾登之典型公式卽§38〔40〕。式

§98 羅斯公式

動能者或示之以速度或示之以動量羅斯之算則將兼而示之屬於速度者用綜合坐標 $q_1,q_2,\cdots q_m$ 屬於動量者用坐標之其餘部分羅斯(E. J. Routh)爲辨別故記之以 $x,x',x''\cdots$ 故動能 T 爲 $\dot{q}_1,\dot{q}_2\cdots\dot{q}_m$, $\dot{x},\dot{x}',\dot{x}''\cdots$ 之調和二次涵數而與坐標 $x,x',x''\cdots$ 相應之動量爲下式

$$\varkappa=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}},\quad \varkappa'=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}'},\quad \varkappa''=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}''}\cdots \cdots\cdots (46)$$

此種公式若書其全則決定 $x,x',x''\cdots$ 爲 $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots\dot{q}_m\ \varkappa,\varkappa',\varkappa''\cdots$ 之線性涵數

今有涵數以 $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots\dot{q}_m,\varkappa,\varkappa',\varkappa''\cdots$ 示之如下式

$$R=T-\varkappa\dot{x}-\varkappa'\dot{x}'-\varkappa''\dot{x}''-\cdots\cdots (47)$$

以 δ 運算作於上式之兩邊則有下式

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1}\delta\dot{q}_1+\cdots+\frac{\partial R}{\partial \varkappa}\delta\varkappa+\cdots=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\delta\dot{q}_1+\cdots+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}+\cdots$$
$$-\cdots\cdots (48)$$

如(46)式所示者消之則有

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1}\delta\dot{q}_1+\cdots+\frac{\partial R}{\partial \varkappa}\delta\varkappa+\cdots=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\delta\dot{q}_1+\cdots-\dot{x}\,\delta\varkappa-\cdots \quad (49)$$

因變數 $\delta q_1,\delta q_2,\cdots\delta q_m,\delta\varkappa,\delta\varkappa',\delta\varkappa''$ 視為獨立

故

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1},\quad p_2=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}=\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2},\ \cdots\cdots (50)$$

$$\dot{x}=-\frac{\partial R}{\partial \varkappa},\quad \dot{x}'=-\frac{\partial R}{\partial \varkappa'},\quad \dot{x}''=-\frac{\partial R}{\partial \varkappa''},\ \cdots\cdots (51)$$

於是動能為兩調和二次涵數之和如下式

$$T=\mathfrak{T}+K \cdots\cdots [182]$$

上式 $\mathfrak{T}$ 但涵速度 $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots\dot{q}_m$ 而 K 但涵動量 $\varkappa,\varkappa',\varkappa''\cdots$

由(47)(51)兩式得下式

$$T=R-(\varkappa\frac{\partial R}{\partial \varkappa}+\varkappa'\frac{\partial R}{\partial \varkappa'}+\varkappa''\frac{\partial R}{\partial \varkappa''}+\cdots) \cdots\cdots (52)$$

§99　五度時間線攝提格拉蘭奇公式與哈密爾登典型公式

拉格蘭奇公式更書之如下式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_r}=-\frac{\partial V}{\partial q_r} \cdots\cdots [180]_a$$

此卽

$$\dot{p}_r=-\frac{\partial}{\partial q_r}(V-T) \cdots\cdots [180]_b$$

設命

$$\frac{\partial T}{\partial q_r}=-\frac{\partial T'}{\partial q_r} \cdots\cdots [183]$$

上式後將證明則得

$$\dot{\ }=-\frac{\partial H}{\partial q_r} \cdots\cdots (53)$$

上式 H 爲全能而 $H=T'+V$ 故 T' 爲動能 V 爲勢能 H 爲哈密爾登涵數(53)式爲哈密爾登運動典型公式之第二式其第一式如下示

$$\dot{q}_r=\frac{\partial H}{\partial p_r}\quad\cdots\cdots(54)$$

由§91〔166〕式 $\mathfrak{S}=Wt_2$ ……〔166〕

〔168〕式 $\mathfrak{S}=pdq$ ……〔168〕

上式 $W=h\nu$ 而 t_2 爲五度時間線 $\mathfrak{S}$ 爲作用量

故 $$p=\frac{Wt_2}{q}=\frac{W}{u}\quad\cdots\cdots〔184〕$$

於是 $$mvu=h\nu\quad\cdots\cdots〔68〕$$

上式爲§45〔68〕式而 u 爲五度時間線之速度於是有下式

$$u=\frac{h\nu}{mv}\quad\cdots\cdots〔68〕_a$$

故 $$\dot{q}_r=\frac{\partial H}{\partial p_r}\quad\cdots\cdots(54)$$

故綜合速度 $\dot{q}_r$ 卽波速 u 成於五度時線者也此明哈密爾登式與五度時間線之關係

若動能 T 爲 $\dot{q}_r$ 之調和二次涵數則由歐勞(Euler)定理有下式

$$2T=\Sigma\dot{q}_r\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_r}=\Sigma\,\dot{q}_r\frac{\partial E}{\partial\dot{q}_r}=\Sigma\,p_r\dot{q}_r\quad\cdots\cdots〔185〕$$

上式 $E=h\nu$ 卽〔166〕式之 W 故〔68〕式

得 $$p_r=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_r}\quad\cdots\cdots〔184〕_a$$

於是 $$\dot{p}_r=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_r}\right)\quad\cdots\cdots(55)$$

由〔180〕$_a$式〔183〕式得下式

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad \cdots\cdots (53)$$

而 $\dot{q}_r$ 爲綜合速度亦卽五度時間線之速度 u 此明拉格蘭奇式哈密爾登式與五度時間線之關係

今將證明〔183〕式命　$x = \varphi(q_1, q_2, \cdots q_n)$ $\cdots\cdots (56)$

則

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots \quad \cdots\cdots (57)$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots \quad \cdots\cdots (58)$$

而 $2T = \Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = A_{11}\dot{q}_1^2 + A_{22}\dot{q}_2^2 + \cdots + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \cdots$ $\cdots\cdots (59)$

上式

$$\left.\begin{aligned} A_{rr} &= \Sigma m\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial q_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_r}\right)^2\right\} \\ A_{rs} &= \Sigma m\left\{\frac{\partial x}{\partial q_r}\frac{\partial x}{\partial q_s} + \frac{\partial y}{\partial q_r}\frac{\partial y}{\partial q_s} + \frac{\partial z}{\partial q_r}\frac{\partial z}{\partial q_s}\right\} = A_{sr} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (60)$$

由〔185〕式

$$2T = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + \cdots \quad \cdots\cdots (61)$$

設一體系之運動除上述者外另有一運動其動量與速度以 p' 與 q' 辨之則以下式示之

$$p_1\dot{q}_1' + p_2\dot{q}_2' + \cdots = p'_1\dot{q}_1 + p'_2\dot{q}_2 + \cdots \quad \cdots\cdots (62)$$

上式假定 $p_1, p_2 \cdots$ 除 p_2 外皆消而 $p'_1, p'_2 \cdots$ 除 p'_1 外亦皆消則 $\dot{q}_2 : p_1 = \dot{q}'_1 : p'_2$

動能亦可作爲動量之調和二次涵數而以 T' 記之乃有下式

$$2T' = A'_{11}p_1^2 + A'_{22}p_2^2 + \cdots + 2A'_{12}p_1p_2 + \cdots \quad \cdots\cdots (63)$$

於是(61)式作下式

$$p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2+\cdots=T+T' \qquad (64)$$

上式T如(59)式所示而T'如(63)式所示於是用δ之變號有下式

$$p_1\delta\dot{q}_1+\dot{q}_1\delta p_1+p_2\delta\dot{q}_2+\dot{q}_2\delta p_2+\cdots=\delta T+\delta T'$$

$$=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\delta\dot{q}_1+\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}\delta\dot{q}_2+\cdots+\frac{\partial T'}{\partial p_1}\delta p_1+\frac{\partial T'}{\partial p_2}\delta p_2+\cdots \qquad (65)$$

由〔184〕$_a$式得下式

$$\dot{q}_1\delta p_1+\dot{q}_2\delta p_2+\cdots=\frac{\partial T'}{\partial p_1}\delta p_1+\frac{\partial T'}{\partial p_2}\delta p_2+\cdots \qquad (66)$$

而$\delta p_1,\delta p_2\cdots$皆獨立故 $$\dot{q}_r=\frac{\partial T'}{\partial p_r} \qquad 〔68〕_b$$

因δ之變號用之動量亦用之坐標故(65)式須增下值

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial T'}{\partial q_1}\delta q_1+\cdots$$

而$\delta p_1,\delta p_2\cdots\delta q_1,\delta q_2\cdots$皆獨立於是得〔68〕$_b$式亦得下式

$$\frac{\partial T}{\partial q_r}=-\frac{\partial T'}{\partial q_r} \qquad 〔183〕$$

綜合坐標者在$3n$度之外另立坐標而以為算是建坐標於空間之外所謂自無適有也此與易方陣之交錯關係相類是以為q數也(§26)蓋惟視空間為0而自無適有另出空間然後可得之於第五度易方陣之所以神其變化要在此而已矣於是知拉格蘭奇之創綜合坐標其於算也可謂至矣盡矣蔑以加矣而哈密爾登典型公式雖曰基本亦不過因拉格蘭奇之成而化出之

拉格蘭奇綜合坐標之成功也其綜合速度$\dot{q}$乃為五度時間線之速度為u而不為v此在波動方程創設之前

易方陣為 q 數而又運用量子週期變化之義故其方陣八行八列而非無限是則有過於綜合坐標之義矣是以易方陣則已將量子論與相對論化之而為一而量子論與相對論者二十世紀方興之學說也

動量 p 與坐標 q 皆命其空間三分向則有 p_x,p_y,p_z 與 q_x,q_y,q_z 此易卦之為六爻也而 p 與 q 為交錯量蓋 q 為三度則 p 為第四度而 p 為三度則 q 為第四度於是交錯兩卦共十二爻為第五度與四度之合之交錯

羅斯分析動能 T 為㗊與 K 前者但涵速度 $\dot{q}$ 後者但涵動量 p 此即 T 與 T' 之分辨而拉格蘭奇公式中之動能屬於前者故必易其號以為 T' 而後能至哈密爾登之涵數 $H=T'+V$ 此因 p 與 q 為交錯量之故也

動能 T 與勢能 V 亦復為交錯量此則四度之合與第五度之交錯也蓋動能繫於動量與坐標而勢能惟繫於坐標二者之辨亦猶空時向量與空間向量也而三五相等故勢能屬之第五度而動能屬之四度之合

第二十章

太極曲線之幾何解析

§100 太極曲線定義

太極圖中之曲線以分黑白者並其兩圓圈謂之太極曲線兩圓圈者黑中則有白自中則有黑也此曲線以幾何解析述之如此

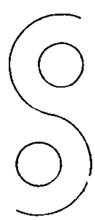


圖86 太極曲線

圖86所示為太極曲線為一波形而增兩圓凡一曲線有峯與谷謂之波形波形曲線示如下式

$$y=x^3 \cdots\cdots\cdots\cdots(186)$$

上式 y 為縱軸 x 為衡軸 y 之值以 x 之值自乘三次而得之者必為有峯谷之曲線又謂之三乘曲線言 x 之自乘三次也而太極曲線之幾何解析不僅曲線又并其兩圓圈在內若有三乘曲線而作下式

$$xy=ax^3+bx^2+cx+d \cdots\cdots\cdots(1)$$

謂之三峯曲線如圖87示之蓋有三峯而四足其兩足漸近於 y 軸所謂漸近線者終不遇之線也餘兩足為拋物線足其最簡單之形示之如下式

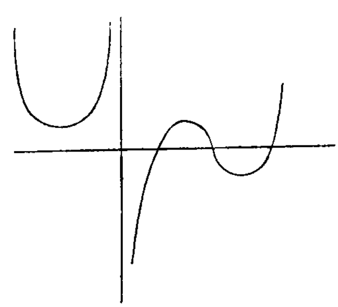


圖87 三峯曲線

$$axy=x^3-a^3 \cdots\cdots\cdots(2)$$

於是蜿蜒部分爲一曲

§101　牛頓研究五種變態三乘曲線

牛頓研究三乘曲線乃得五種變態形式蓋三乘曲線之正常形式爲下示之公式

$$y=ax^3+bx^2+cx+d \qquad [187]$$

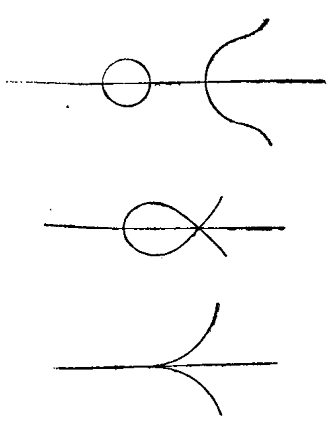
而變態者則爲下式

$$y^2=ax^3+bx^2+cx+d \qquad [188]$$

牛頓就此變態而研究之共得五種其第一種曰卵鐘曲線蓋有曲線如鐘形此外更有一卵形如圖88示之其公式如下示

$$y^2=(x-a)(x-b)(x-c) \qquad (3)$$

上式三根皆實數而皆不相等



上圖88 卵鐘曲線　中圖89 荷包曲線

第二種曰單鐘曲線如圖88而卵形縮爲一點鐘形則如故式如次

$$y^2=(x-a)^2(x-b) \quad a<b \qquad (4)$$

上式所示卽兩根較小者爲相等

第三種曰鐘形曲線蓋兩根爲虛値式如次

$$y^2=(x^2+a^2)(x-b) \qquad (5)$$

此惟存鐘形如前圖而第二種之一點亦滅

第四種曰荷包曲線示如圖89蓋$a<b$

而兩大根相等其式如次

$$y^2=(x-a)(x-b)^2 \quad \cdots\cdots(6)$$

第五種曰箭頭曲線如圖90示之三根皆相等其式如次

$$y^2=(x-a)^3 \quad \cdots\cdots(7)$$

上示五種三乘曲線牛頓所得

§102　太極曲線之作成

上說五種變態三乘曲線今惟用其第一種謂之曰卵鐘曲線（§101圖88）三乘曲線可作空時線跡視之蓋 x^3 代表三度而 y 軸爲第四度易道陰陽則有五度而第五度者與四度之合爲交錯量交錯量者相等而反其號在此則第五度與四度之合同形而反其向同形相等也而反向者異號也故卵種曲線爲四度增益第五度則示如圖91

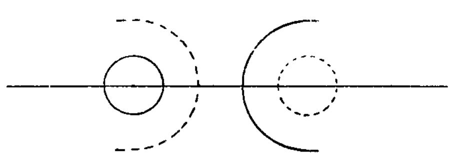


圖 91　陰陽卵鐘曲線

圖91所示則有陰陽兩卵鐘曲線相等而向相反亦卽陰陽兩四度體系若以陽爲空時四度則陰爲第五度反之若以陰爲空時四度則陽爲第五度

圖92 I 以陰陽卵鐘曲線作於對角而分 A, B, C, D 四象限II以 A, D

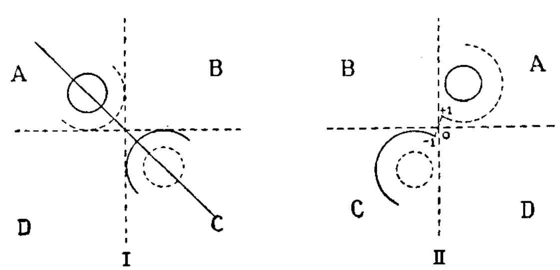


圖 92　　曲線之易位

在左者移於右而 B,C 在右者移於左

三度中以 $+1$ 與 -1 爲反向在一直線其有垂直於中之線是爲 0 四度中頗有異若視縱線爲 0 衡線爲 $+1$ 同時亦視衡線爲 0 而縱線爲 -1 於是四度中之 ±1 在三度中則皆爲 0 是故 II 之 A,C 兩象限中之曲線相聯而太極曲線於以成焉

§103　太極線曲之算

命 ds 爲空時線跡上一增量 dx_3,dx_2,dx_1,dx_4 代 x,y,z,τ 四度線跡上之增量而 $\tau=ict$ 乃有下式

$$ds^2=dx_3^2+dx_2^2+dx_1^2+dx_4^2 \quad\cdots\cdots〔189〕$$

若命〔188〕式之 y^2 相當於 ds^2 則〔188〕式乃爲下式

$$\begin{aligned} y^2&=ax^3+bx^2+cx+d \\ &=a[x^{\frac{3}{2}}]^2+b[x^{\frac{2}{2}}]^2+c[x^{\frac{1}{2}}]^2+d[x^{\frac{0}{2}}]^2 \quad\cdots\cdots(8)\end{aligned}$$

命
$$\left.\begin{aligned} &\gamma_3^2=a,\ \gamma_2^2=b,\ \gamma_1^2=c,\ \gamma_0^2=d \\ &\gamma_{\mu\nu}=-\gamma_{\nu\mu}\quad \mu,\nu=1,2,3,0 \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(9)$$

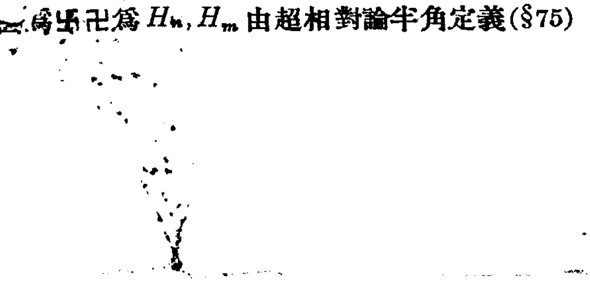
則得
$$\left.\begin{aligned} iy&=i[\gamma_3x^{\frac{3}{2}}+\gamma_2x^{\frac{2}{2}}+\gamma_1x^{\frac{1}{2}}+\gamma_0x^{\frac{0}{2}}] \\ -iy&=-i[\gamma_3x^{\frac{3}{2}}+\gamma_2x^{\frac{2}{2}}+\gamma_1x^{\frac{1}{2}}+\gamma_0x^{\frac{0}{2}}] \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(10)$$

於是有下式

$$x^{\frac{3}{2}}=x_3,\ x^{\frac{2}{2}}=x_2,\ x^{\frac{1}{2}}=x_1,\ x^{\frac{0}{2}}=x_4 \quad\cdots\cdots〔190〕$$

由 §76 圖 77 更作爲圖93

圖93爲左旋右旋之[illegible]卐卍爲 H_n,H_m 由超相對論牛角定義(§75)



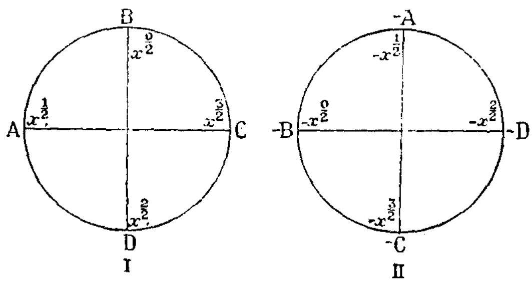


圖93 陰陽四度體系之冪數

五度中之四圓當四度中之兩圓當三度中之一圓斯之謂量子

凡一五度體系可分析爲兩四度體系而第五度則當一四度體系故第五度與五度體系須分辨焉 H_n, H_m 各爲第五度各當一四度體系

凡一四度體系可分析然兩三度體系而第四度則當一三度體系故第四度與四度體系須分辨焉

上圖 $B=x^{\frac{4}{2}}$ 此四度之圓當於五度中之兩圓也而直角遂爲 $x^{\frac{1}{2}}$ 當於五度中之半圓也四度中之圓當於三度中之半圓

命 $x=2$

則
$$\left.\begin{array}{l} a^{\frac{0}{2}}=1,\ \ x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}=1.4142, \\ x^{\frac{2}{2}}=2,\ \ x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}=2.8284, \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

作之如圖 94 此以圖 93 之 I 與 II 兩圓而爲之一圓也

圖94兩圓中心 P_1, P_2 自 P_1 至 B 爲 $x^{\frac{0}{2}}=1$ 自 P_1 至 A 爲 $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ 自 P_1 至 D 爲 $x^{\frac{2}{2}}=2$ 自 P_1 至 C 爲 $x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}$ 畫 CDA 曲線自 P_2 至 B', A', D', C' 亦爲 $x^{\frac{0}{2}}, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{2}{2}}, x^{\frac{3}{2}}$ 等於 $1, \sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{8}$ 而方向與 P_1 者反畫 $C'D'A'$ 曲線兩曲線 A 與 A' 相遇於 O 點畫 SOS', ROR'

由圖94 SOR 爲空間區域 SOR' 爲時間區域 P_1A, P_1D, P_1C 爲空間三度 P_1B 爲第四度第四度 $x^{\frac{0}{2}}$ 恒等於 1 不問 x 之值

另一方面 $S'OR'$ 爲空間區域 $S'OR$ 爲時間區域 P_2A',P_2D',P_2C' 爲空間三度 P_2B' 爲第四度

空間區域半波時間區域一圓者陽一陰二之義 A,A' 相遇於 O 者 ± 1 在空間爲零兩空間區域中半波合而爲全波

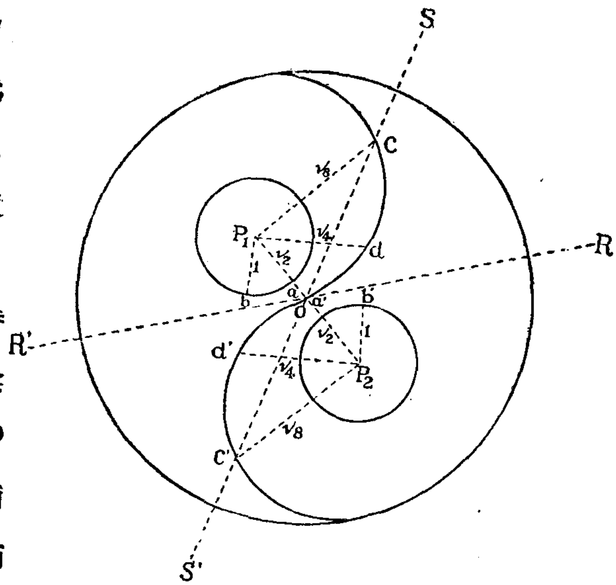


圖94　陰陽兩四度體系合爲太極圖

對於 P_1 則 P_2 之四度合而爲第五度對於 P_2 則 P_1 之四度合而爲第五度第五度者謂之電 P_1B 不作 $x^{\frac{4}{2}}$ 而作 $x^{\frac{0}{2}}$ P_2B' 亦如之 $x^{\frac{0}{2}}$ 者一切皆一故以 1 爲半徑而作圓在空間中時間線須與任何方向爲垂直此惟可等於 o 於是在空間中惟有 $CDAA'D'C'$ 之電波故電子之形可以圖95示之

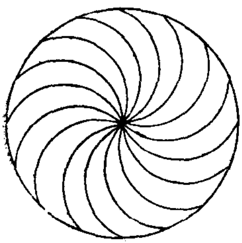


圖95　電子波

凡圓周上質點之行動可得以對徑線上來復動代表之則波路上質點之行動亦可以 COC' 直線上不等速之運動代表之於是在空間中所見爲電力線之散佈此乃爲電子以上所說以三乘曲線公式作成太極圖

電子者以之爲電力線之四向散射或以之爲

電波之四向傳佈則無以異圖95者依其中心而作同心球面若干層則皆爲同振相之面垂直於面者爲波射線亦卽電力線此波羅吉利振相速度之算(§31〔24〕式)爲符於易方陣之解也

$$\psi(x,y,z,t)=C\cos 2\pi\nu\left[t-\int\frac{dr}{u}\right] \qquad \text{〔24〕}$$

而

$$\Psi(x,y,z)=\int\frac{dr}{u} \qquad \text{〔24〕}_a$$

上式Ψ爲同振相之面而$\int\frac{dr}{u}$爲波射線亦卽斐馬原則之公式(§90〔163〕式)而由超相對論公式$t_2=\frac{v}{u}t_1$(§85〔155〕式)則相當於五度時間線

今之算者知方陣算法爲用之廣且大也則亦致力於立方行列式(cubic determinat; kubische determinate)而求之甚劬蓋欲由n^2之方陣元q_{ik}而進於n^3之方陣元q_{ijk}以配隸於立方體系方陣算法導源於黎白尼茲(Leibnitz 1693)而樊杜蒙特(Vandermond 1772)則實爲開山之祖立方行列式之研究其已爲之而自葛斯巴立斯(De Gasparis1861)以來學者踵起且將擴之而爲n^p之方陣元然而立方行列式之研究其算繁劇而能施之於實用者迄未有成

易方陣以六十四卦爲方陣元而六十四卦爲球面排列是則爲波射線而交錯兩卦爲兩波射線同一直線而反其向球面排列則包舉空間而立方在其中矣是故三足指數之方陣元爲不必用而方易陣已超乎方陣數學而進於方陣形學之樊若能入遊其樊而無感其名余姑不爲方陣形學條理而使之成獨立之科然若光波方陣之爲雙曲線陽陰電子方陣之爲圓則皆因

其固然而已爲之解

波射線爲第五度而易方陣球面排列謂之包舉一空間者三五相等之義也於是卦之六爻爲坐標 q 與動量 p 之各三度示之爲 q_x, q_y, q_z, p_x, p_y, p_z 而 p 與 q 爲交錯量合之則爲四度體系於是易方陣則已超於幾何學之樊而物理學之一切定理皆在其中矣

自哈生保引用方陣算法於量子力學物理學者咸以爲量子力學所須要者乃無限行列式也而易方陣則固八行與八列於是乎知量子力學所須要者非無限行列實乃八行八列之有限行列式也

第二十一章

太極曲線導出陰陽電子麗子中和子

§104 阿基米底曲線

前章所論以牛頓第一種變態三乘曲線演出太極圖茲將引用阿基米底曲線(Archimedean Spiral) 亦演出太極圖先述若干種曲線如次

第一種曰螺旋曲線此種曲線徑向量 (radius vector) 依幾何級數而遞增向量角(vector angle) 依等差級數而遞增故稱曰等角螺旋曲線亦曰對數螺旋曲線示之如圖 96 其公式如次

$$r = Ae^{B\theta} \quad\cdots\cdots(1)$$

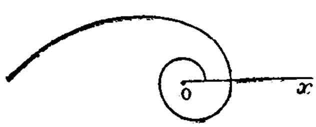
上式 e 爲自然對數基 A,B 皆常數亦有下式

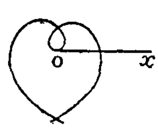
$$p = r\sin\alpha \quad\cdots\cdots(2)$$

上式 α 爲線路上一點之切線與徑向量所成角度而爲常數 p 爲自原點垂直於切線之長

第二種曰拋物線型螺旋曲線(parabolic spiral)其公式示如下

$$r = a\theta^n \quad\cdots\cdots(3)$$





(上)圖96 等角螺旋曲線

(下)圖97 阿基米底曲線

阿基米底曲線者作於古希拉阿基米底示如

圖 97 而爲拋物線型螺旋曲線之一種其公式如下示

$$r = a\theta \quad \cdots\cdots (4)$$

此曲線徑向量與切線成角度等於向量角亦作下式

$$p = \frac{r^2}{\sqrt{(a^2+r)}} \quad \cdots\cdots (5)$$

第三種曰雙曲線型螺旋曲線 (hyperbolic spiral) 爲阿基米底曲線之反亦曰反螺旋曲線(reciprocal spiral)示如圖 98其公式如次

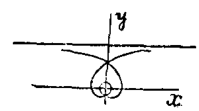


圖98　反螺旋曲線

$$r = a\theta^{-1} \quad \cdots\cdots (6)$$

此曲線有漸近線與原線相距爲 a 其式亦作

$$p^{-2} = r^{-2} + a^{-2} \quad \cdots\cdots (7)$$

第四種曰麗都螺旋曲線(lituus spiral)以原線爲漸近線示如圖 99 其公式如下示

$$r = a\theta^{-\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots (8)$$

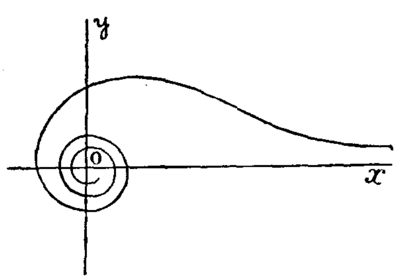


圖99　麗都螺旋曲線

除上述四種螺旋曲線外有稱曰庫底螺旋曲線者(Cotes spiral) 示一質點之行跡受中央勢力之影響而爲螺旋其中央勢力之所施反比例於距離之三乘其公式爲下示

$$p^{-2} = Ar^{-2} + B \quad \cdots\cdots (9)$$

上式 AB 爲任何値若 $B=0$ 則成 $p = r\sqrt{A}$ 故爲等角螺旋曲線若 $A=1$ 則成 $p^{-2} = r^{-2} + B$ 故爲極坐標式 $r\theta = 1/\sqrt{B}$ 此卽反螺旋曲線

命　　$u=r^{-1}$ 則得下式

$$p^{-2}=u^2+(du/d\theta)^2 \qquad \cdots\cdots(10)$$

$$p^{-2}=Au^2+B \qquad \cdots\cdots(11)$$

故　　$Au^2+B=u^2+(du/d\theta)^2 \qquad \cdots\cdots(12)$

由是　　$(du/d\theta)^2=(A-1)u^2+B \qquad \cdots\cdots(13)$

上式右項依 $A-1$ 與 B 皆正值或 $A-1$ 爲正值而 B 爲負值或 $A-1$ 爲負值而 B 爲正值可書如次

$$C^2(u^2+D^2),\ C^2(u^2-D^2),\ C^2(D^2-u^2)$$

積分上式三種之值得極坐標公式如次

$$u=C\sinh D\theta, u=C\cosh D\theta,$$

$$u=C\sin D\theta \qquad \cdots\cdots(14)$$

§105　阿基米底曲線演出太極圖

余今用阿基米底曲線正反兩種相聯爲一示之如圖 100 其徑向量値用 §103 圖 94 所示

$$P_1B=x^{\frac{0}{2}}=1$$

$$P_1A=P_1T=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

$$P_1D=P_1S=x^{\frac{2}{2}}=2$$

$$P_1C=P_1R=x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}$$

$$P_1Q=x^{\frac{4}{2}}=4$$

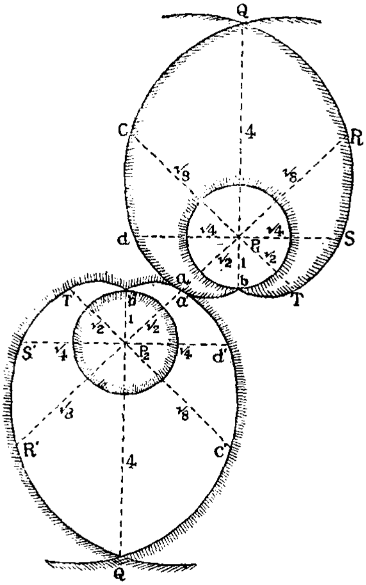


圖100　正反阿基米底曲線

$$P_2B' = x^{\frac{0}{2}} = 1$$

$$P_2A' = P_2T' = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$P_2D' = P_2S' = x^{\frac{2}{2}} = 2$$

$$P_2C' = P_2R' = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$$

$$P_2Q' = x^{\frac{4}{2}} = 4$$

上圖若有質點行於 $QCDAB$ 弧則 P_1 爲中心必有吸力由小而大旣至乎 B 則行一圓圈此時中心吸力爲 mv^2 因 $r=1$ 也一周之後自 B 外出而行於 $TSRQ$ 弧則中心吸力由大而小

若有質點行於 $B'A'D'C'Q'$ 弧則 P_2 爲中心必有吸力由大而小行於 $Q'R'S'T'B'$ 弧則中心吸力由小而大旣至乎 B' 則行一圓圈此時中心吸力爲 mv^2 因 $r'=1$ 也一周之後自 B' 而外出復行於 $B'A'D'C'Q'$ 弧

此兩曲線代表兩四度體系 H_n, H_m 而對於 P_1 之曲線則 P_2 之曲線爲第五度故 P_1 爲中心吸力者亦卽 P_2 之曲線所變也對於 P_2 之曲線則 P_1 之曲線爲第五度故 P_2 爲中心吸力者亦卽 P_1 之曲線所變也在三度空間中所可得見者惟 $CDAA'D'C'$ 之波曲線其他不在三度而無見焉故如圖100之兩阿基米基底曲線各皆隱其半此卽太極曲線如§103所述

§106　文王八卦爲太極圖

P_2 曲線爲 P_1 曲線之中心吸力此坤之交乾也而 $P_1A = x^{\frac{1}{2}}$ 爲震(☳)第一度也 $P_1D = x^{\frac{2}{2}}$ 爲坎(☵)第二度也 $P_1C = x^{\frac{3}{2}}$ 爲艮(☶)第三度也而

$P_1B=x^{\frac{0}{2}}$亦爲坎而爲時間線此卽§72圖 67 坤交三陽震艮皆一交坎獨二

P_1曲線爲P_2曲線之中心吸力此乾之交坤也而$P_2A'=x^{\frac{1}{2}}$爲巽(☴)第一度也$P_2D'=x^{\frac{2}{2}}$爲離(☲)第二度也$P_2C'=x^{\frac{3}{2}}$爲兌(☱)第三度也而$P_2B'=x^{\frac{0}{2}}$亦爲離而爲時間線此卽§72圖67乾交三陰巽兌皆一交離獨二

因空間三度爲三直角而爲一周故有三合之義(§72 圖 69)於是坎離之在空間向量者以乾坤代之其在時間向量者無易焉而改其向爲垂直於圓中(§72 圖 70)

於是文王八卦之乾艮震爲太極圖中之半白巽坤兌爲太極圖中之半黑坎爲白中之黑離爲黑中之白故文王八卦爲太極(圖§73)

§107 太極曲線爲電子

空時電磁命爲爲A,B,C,D四向量互交直角而三合之義AD爲合因空間三直角而爲一周也(§72 圖 69 II)今可以圖 100 之CDA弧爲C線BQ爲B線TSR弧爲A線而D線則爲P_2故AD爲合則TSR弧爲在於P_2此在P_1之曲線而論也在P_2曲線亦可以$A'D'C'$弧爲C'線$B'Q'$爲B'線$R'S'T'$弧爲A'線而D'線則爲P_1故$A'D'$爲合則$R'S'T'$弧爲在於P_1當$R'S'T'$弧之在P_1時CDA弧上乃有質點之行動當TSR弧之在P_2時$A'D'C'$弧上乃有質點之行動至於兩圓圈上之行不占時間因其在空間中爲 0 之故也於是在空間中惟質點之行於一波自漸近線之向無窮大而來至漸近線之向無窮大而去兩點Q與Q'鄰於兩並行之漸近線也而C與C'皆爲電向量故所謂質點電力點也於是此波爲電波其四向傳佈乃

謂之電子

§108 陰陽電子之分辨

電子陰陽之分辨如圖101說明之 EF 與 $E'F'$ 爲兩漸近線中間兩阿基米底曲線其向相反實線所示來去皆無限遠方中行一曲卽在空間陳顯電波所謂無限遠方者不在空間之範圍而在超空間之域中

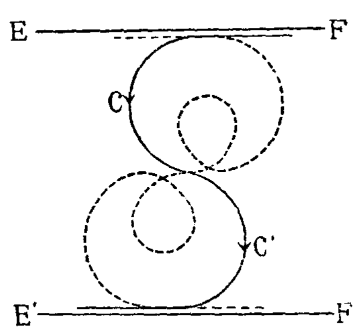


圖101　電波陳形於空間

右圖 C 爲陽 C' 爲陰則陽之進者命曰進陰之進者命曰退於是 C' 之矢向爲反而 C' 與 C 兩皆內向此爲陰電子

反之若以 C' 爲陽 C 爲陰則 C 之矢向爲反於是 C 與 C' 兩皆外向此爲陽電子

圖102卽§103圖94之曲線 $CDAA'D'C'$ 爲太極曲線若聯 CC' 直線在波路上均分若干段每段畫一直線垂直於 CC' 線則在 CC' 線上其段不均若兩質點其一自 C 其一自 C' 沿直線相對而行以相等之時間移動一段之長則其速度不勻若 CC' 線以0爲中心而右旋其旋轉

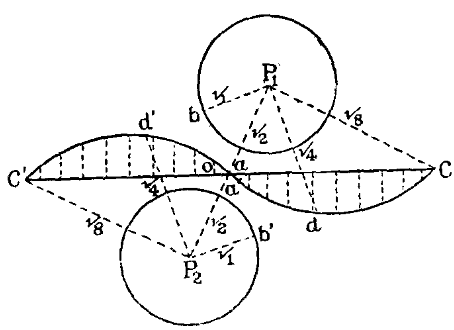


圖102　波線化爲力線

速度使兩質點適達波路上相應之點由是兩質點在 CC' 線上之行動因 CC' 線之旋轉而變爲波故無異於 CDA 及 $C'D'A'$ 兩曲線上質點循曲路而相對以等速度行然其在 CC' 線上則爲直行而速度不勻速度不勻謂之加速度而加速度乘質量謂之力 $(f=ma)$ 故太極曲線等於一力線而其傳佈於空間等於力線之四向散射此力線爲 C 線是謂之電力線而外向者爲陽電子內向者爲陰電子

§109 化空間爲零

哲學之所尙論化自己爲零何謂也凡愛人利人之心與言與行皆仁也而不可自己矜侉不但不可自己矜侉卽稍有自矜之感覺亦不可而有之者則旣違仁故曰仁之至也化自己爲零此甘地之言也於以釋仁最爲精審其視韓非子之說仁者謂其中心欣然愛人而非求其報也爲賢多矣

科學之所尙論化空間爲零何謂也譬諸若電爲第五度第五度者與三度空間中任何向量均垂直故 S_x, S_y, S_z 爲空間三度者復可立電之三度 E_x, E_y, E_z 而與空間三度爲垂直然人所得見惟三度故以 S 爲三度則 E 之三度須合一而爲第五度此在 S 三度中爲零蓋一向量與空間中任何向量均垂直則在空間中惟可爲零反之若以 E 爲三度則 S 之三度亦須合一而於 E 空間中爲第五度亦卽於 E 空間中爲零若觀察者所居爲 S 空間則不見 E 然而電力線之散佈而包舉一空間人將見之則所見爲 E 空間既見 E 爲空間則已自忘其 S 之爲空間蓋在 E 空間則 S 爲零故曰化空間爲零一切物理學之定律咸必以空間化零然後得釋

§110　麗子與中和子

若 §108 圖 101 之實線波不爲 C 線而爲 AD 線斯卽所謂五度時間線也其散佈於空間謂之中和子中和子 (neutron) 者質量之基本也 AD 之合一由三合之義而其爲五度時間線也以一線論不作爲兩線之合

圖103之 I A 爲空間 B 爲時間 C 爲電 D 爲磁而合於 A 故 AD 爲空間線以 AD 爲零是化空間爲零由是 C 爲 $+1$ 而爲電力線之散佈因空間旣已爲零也是乃爲電子而 B 爲 -1 是爲時間

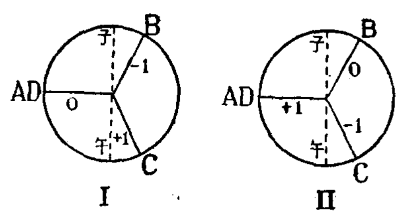


圖 103　空間爲零

圖103 之 II 由相對論 A 爲空間 B 亦可爲空間 A 以空間而化零 B 亦可以空間而化零由是 AD 爲 $+1$ 而爲五度時間線之散佈因 B 爲空間旣已爲零也是乃爲中和子而 C 爲 -1 是爲四度時間線

圖 101 所示一曲之波若爲 AD 線者則必亦有內向與外向之辨而外向者爲中和子內向者爲麗子麗子者爲電子之質量而中和子之質量大於麗子者千八百倍無有畸零其詳論於拙著綜合物理學

麗子之名余始作之而不得已麗子不離於電子是故謂之麗今物理學但稱電子之質量然電子爲電力線之散佈而其質量爲 $-(AD)$ 線之散佈是有攸異而不可以混言之也且旣云電子又曰電子質量然則其質量何自來亦不可不知也

夫曰 C 線之散佈爲電子言質量則不涉於電量曰 $-(AD)$線之散佈爲麗子言質量則不涉於電量雖麗子不離電子而獨存而言不可若是其幾也

§111 證明太極曲線爲第五度

前論 H_n, H_m 爲卐卍爲左旋右旋之圓其合爲光波亦曰量子量子爲五度體系光波者量子之在第四度也而量子在三度空間之中爲陰陽電子麗子與中和子

圖 104 之 IO 爲圓中心 P 爲一點在周 H_n, H_m 爲兩切線作於 P 點而其向相反故爲左旋與右旋此代表量子在第四度若作於三度空間則以P 爲中心自一點而擴張爲圓於是P化爲P_1, P_2 而在周 H_n, H_m 亦因之而移作P爲中心之圓周切線H_n仍左旋而 H_m則本爲右旋今乃爲左旋於是 H_n,H_m 兩皆左旋而爲對衝運動以 P_1,P_2 兩點代表之

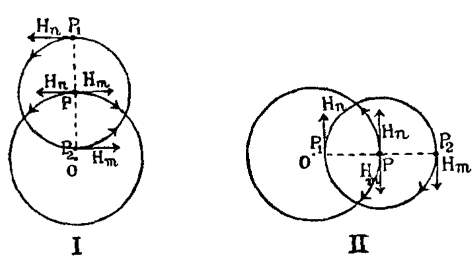


圖 104 量子在空間

圖 104 之 II 與上同說而 P_1,P_2 同爲右旋

圖104之 IP 點在 O 爲中心之圓軌道上亦左旋其角速度與 P_1,P_2在P爲中心之圓軌道上之角速度相同示之如圖 105 之 I 聯 P_1線迹前半實線後半虛線聯 P_2 線迹前半虛線後半實線

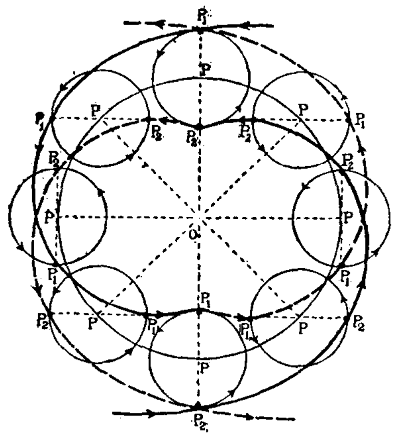


圖 105 I　重周左旋

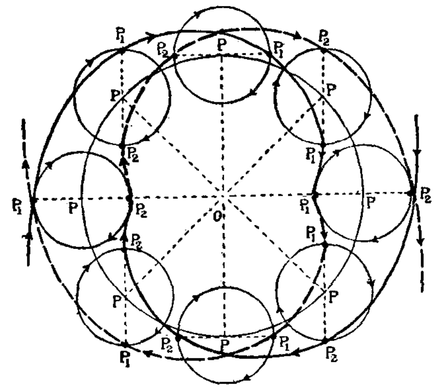
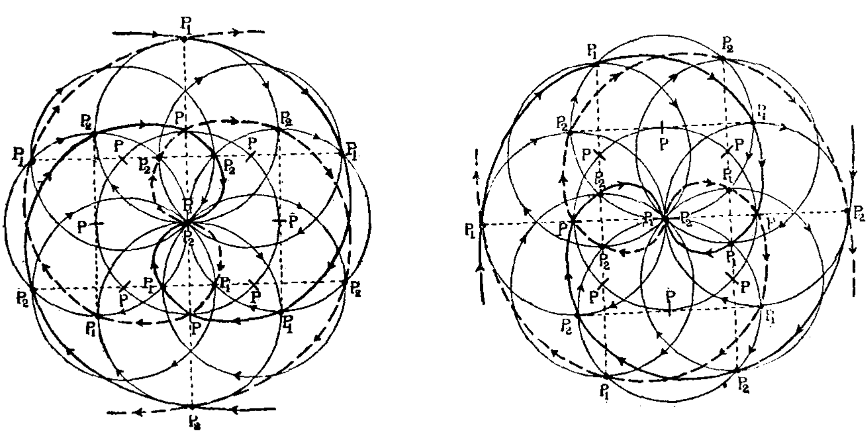


圖 105 II　重周右旋

圖104之IIP點在O爲中心之圓軌道上亦右旋其角速度與P_1,P_2在P爲中心之圓軌道上之角速度相同示之如圖105之II聯P_2線迹前半實線後半虛線聯P_1線迹前半虛線後半實線

兩圖P_1, P_2線迹均成阿基米底螺旋曲線而向相反其中無圓者以其



I　圖106　重周之旋爲阿基米底曲線　II

中心圓徑與在周圓徑不相等之故若相等作之則皆見圓其分虛實線者P_1為實則P_2必虛P_2為實則P_1必虛而P_1,P_2兩者曲線方向相反

兩圓實線俱象河圖兩圓之虛線亦如之(§72圖66)若P為中心之圓半徑與O為中心之圓半徑相等則得兩阿基米底曲線而向相反如圖106示之

上圖I卽圖105之I但改為右旋上圖II卽圖105之II仍為右旋I,II皆有兩阿基米底曲線而方向相反今有理由說明圖105之I改作右旋之故文王八卦帝出乎震齊乎巽相見乎離致役乎坤言說乎兌戰乎乾勞乎坎成言乎艮蓋其序右旋洛書為一右旋卍字(§73圖73)而文王八卦與洛書皆代表量子之在三度空間也陰電子為C線之散佈於A空間陽電子為$-C$線之散佈於$-A$空間而$-C$卽$A,-A$為B故陽左陰右在不同空間譬如原子之核中與核外勢場不同故為兩種空間陽電子在核中陰電子在核外其旋相反若陽電子脫離原子核則與陰電子在同一空間於是易其旋向而與陰電子從同

圖105之I虛線之波為陽電子P_1,P_2俱外出實線之波為麗子P_1,P_2俱內入陽電子見則麗子不見麗子見則陽電子不見兩不相見因其不在同空間也陽電子為A線之散佈於B空間麗子為BD線之散佈於A空間(BD線卽上說之一(AD)線此因單用A,B,C,D一

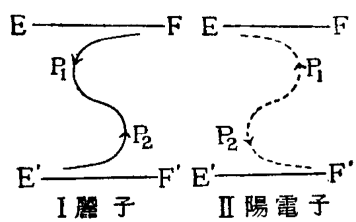


圖107 I麗子 II陽電子

坐標系也若兼用A,B,C,D與$-A,-B,-C,-D$兩坐標系則麗子為一(AD)

線而陽電子爲 $-C$ 線其說詳於拙著綜合物理學)圖 107 示之 $EF,E'F'$ 爲兩漸近線

圖105之II實線之波爲陰電子 P_1,P_2 俱內入虛線之波爲中和子 P_1P_2 俱外出亦兩不相見因其不在同空間也陰電子爲 C 線之散佈於 A 空間中和子爲 AD 線之散佈於 B 空間如圖108示之

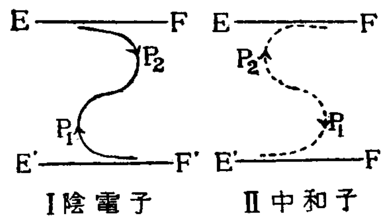


圖108　I陰電子　II中和子

陽電子與中和子相合因其同在 B 空間中之散佈也陰電子與麗子相合因其同在 A 空間中之散佈也

陽電子離開原子核時與陰電子在同一空間故易其左旋爲右旋其如是陰電子爲 C 線之散佈於 A 空間陽電子爲 $-C$ 線之散佈於 A 空間於是陽電子如圖 106 之 I 其虛實兩線代表陽電子與麗子者則如圖 109 示之於是陽電子爲 $-C$ 線之散佈於 A 空間者(圖109 II)與麗子之爲 BD 線之散佈於 A 空間者(圖107 I) 爲同一空間遂相合焉是故陰陽電子之質量同爲麗子

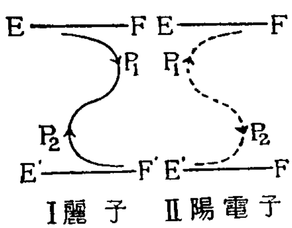


圖109　I麗子　II陽電子

陰電子之發見始於湯姆生(J.J. Thomson 1897)以玻璃管盛稀薄氣體而通電於管之陰極(cathode)陽極 (anode) 其陰極在管端陽極在管壁乃有火花出於兩極之間減少其氣壓則有黑處發見於陰極此黑處因壓力之愈減而愈擴張條線(striations)以作終乃出見螢光 (the phos-

phorescence) 此光謂之陰極線 (cathode ray) 置磁場於側則陰極線之射程下移置電場於側則因電場爲正或負而其射程爲上下移湯姆生確定此陰極線爲荷負電之微塵而算出電荷 e 與質量m之比率於是電子(electron)之名始立矣

宇宙射線(cosmic rays)來自地球外(ultraterrestrial)其强度隨處相同而無物不能穿透今已識其爲超伽馬線 (super-gamma-ray) 由宇宙射線之研究而意外發見陽電子(positron)安特生 (C. D. Anderson 1932) 用十五生的密達對徑之威爾生雲房(Wilson cloud chamber)遮以磁場(15000 guass) 窺測附麗宇宙射線之微塵之行迹而知其荷正電惟質量則輕於質子者甚鉅質子者氫原子之核在陽電子未發見以前仍爲正電荷之基本單位之物質也安特生以爲新發見之陽電子其質量約大於陰電子者二十倍

勃拉開脫與奥敵里尼(Blackett and Occhialini 1933) 復爲安特生之試驗用磁場(2000 to 3000 guass) 而得攝陽電子之行迹其速度幾近光速故質量依羅倫茲式則甚大而無理由言陽電子之靜止質量爲異於陰電子者

梅脫柰(Meitner) 以中和子擊射原子核而得陽電子安特生與古里角立(Curie-Joliot) 以釷 (ThC″) 之伽馬線穿透原子核而兼得陰陽電子此乃伽馬線因原子核之作用而分化爲陰陽電子

中和子之發見幾與陽電子同時羅素福特(Rutherford 1932) 研究鈹射線而得一種新射線名之曰中和子射線蓋鈹者猶氦及鋰以氦核 (卽

α 質點）擊之不見有質子放出但以放射物質所發高速度 α 質點射之則其本身忽變爲輻射源暫稱之曰鈹輻射而非一羣之質子亦非一羣之 α 質點亦非一羣之 β 質點(陰電子)其穿透力之强非他物質可比厚金屬板不能阻其行亦非 γ 線一類之短波電磁輻射於是羅素福特以中和子名之

質子者一中和子一陽電子之合也爲氫之核其質量爲陰電子質量之1847倍而中和子之質量與質子幾近蓋陽電子之質量與陰電子同比於質子爲甚小也

陰陽電子與中和子相繼發明以視八卦之作於七千餘年前者其爲近矣然而爲其脗合將有待於太極曲線導引其變化之本則取諸左右逢其源

第二十二章

太極曲線攝提普通相對論

§112　愛因斯坦相等定義

愛因斯坦命其所創相對論用平直坐標者曰特殊相對論用彎曲坐標者曰普通相對論物體之行程爲直路若有巨箱人在其中使程線自A處入B處出其箱靜止如圖110之I示之此程線爲直而平

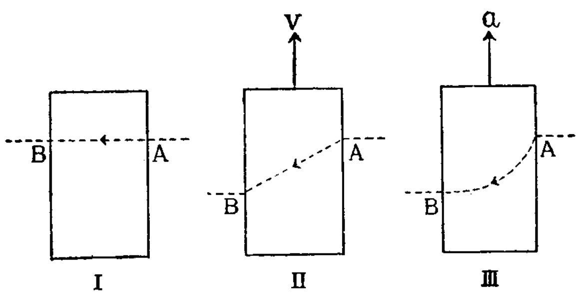


圖 110　相等定義之例證

若箱非靜以v速度而上行則程線入於A出於B爲直而斜若箱之上行以加速度a則入於A出於B箱中所見乃爲曲線II,III示之

箱中所見物行有斜曲而箱未嘗動箱外所見箱行有速度有加速度而物程固直內外不同以坐標系之異也苟箱外坐標系爲準則加速度之箱內坐標系爲曲箱中之人曲以爲直則所見直所爲曲

地球面上物之下墮以加速度謂之地心有引力也亦可慮爲物行固直而地球周圍空間彎曲在彎曲之空間所立坐標系亦復爲彎曲因是之故物

行之直乃見爲加速度而釋之曰地心引力此愛因斯坦命之曰相等定義蓋物視之爲有加速度與視之爲坐標系之彎曲曾未有以異也

§113　愛因斯坦普通相對論畧說

特殊相對論爲速度之相對普通相對論爲加速度之相對四度坐標系之四線爲 x_1,x_2,x_3,x_4 而 ds 爲空時線迹則用下式(§103)

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2 \qquad \text{〔189〕}$$

上式惟限於平直四度空間若彎曲四度空間則用下式

$$ds^2=\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu \quad \mu,\nu=1,2,3,4 \qquad \text{〔191〕}$$

上式可用於任何彎曲坐標系不限於平直者

若

$$g_{\mu\nu}=\begin{cases}1 & (\mu=\nu)\\ 0 & (\mu\neq\nu)\end{cases} \qquad \text{〔192〕}$$

則變爲平直坐標系而〔191〕式乃等於〔189〕式

兩點間最短線爲直線若 $\int_A^B ds$ 爲 A,B 兩點之線積分則直線爲下式

$$\delta\int_A^B ds=0 \qquad \text{〔193〕}$$

上式 δ 爲變 AB 直線至其鄰線之一極小值在彎曲空間不得用〔189〕式而〔193〕式仍有效蓋曲面上之最短線亦爲曲線若最短線卽認爲直線則四度彎曲之空間中直線已爲曲線故〔193〕式謂之測地線

今以〔191〕式代入〔193〕式得下式

$$\delta\int_A^B g_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}\,ds=0 \qquad \text{(1)}$$

$$\delta\left(g_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}\right)=\delta g_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}+g_{\mu\nu}\left\{\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\delta\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial s}\right)+\frac{\partial x_\nu}{\partial s}\delta\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\right)\right\}\cdots\cdots(2)$$

因 $\delta g_{\mu\nu}=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}\delta x_\varrho$ 而上式雙括號中兩項等值(僅 ν 與 u 交換而積加之數視爲無殊)

故 $$\delta\left(g_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}\right)=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}\delta x_\varrho\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}+2g_{\mu\varrho}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\delta\left(\frac{\partial x_\varrho}{\partial s}\right)\cdots\cdots(3)$$

但 $$\delta\left(\frac{\partial x_\varrho}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial s}(\delta x_\varrho)$$

故乘以 ds 而積分於 A,B 間得測地線如下式

$$\int_A^B\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}\delta x_\varrho ds+2\int_A^B g_{\mu\varrho}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}(\delta x_\varrho)ds=0\ (4)$$

上式第二項部分積分之而變值 δ 在 A,B 爲零

$$\int_A^B\left\{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}-2\frac{\partial}{\partial s}\left(g_{\mu\varrho}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\right)\right\}\delta x_\varrho ds=0\cdots\cdots(5)$$

因變值 δx_ϱ 爲任意數故有下式

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}-2\frac{\partial}{\partial s}\left(g_{\mu\varrho}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\right)=0\cdots\cdots(6)$$

即 $$g_{\mu\varrho}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial s^2}+\frac{\partial g_{\mu\varrho}}{\partial s}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}-\frac{1}{2}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}=0\cdots\cdots(7)$$

但 $$\frac{\partial g_{\mu\varrho}}{\partial s}=\frac{\partial g_{\mu\varrho}}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}\text{ 而 }\frac{\partial g_{\mu\varrho}}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}=\frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}$$

故置 $$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \varrho\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\varrho}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}\right)\cdots\cdots[194]$$

得下式 $$g_{\mu\varrho}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial s^2}+\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \varrho\end{bmatrix}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}=0\cdots\cdots(8)$$

上式$\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ \rho\end{bmatrix}$爲克立斯托法爾 (Christoffel) 三指數記號

命
$$\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{Bmatrix}=g^{\sigma\rho}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ \rho\end{bmatrix} \tag{195}$$

$$\frac{\partial^2 x_\sigma}{\partial s^2}=-\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{Bmatrix}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s} \tag{196}$$

上式爲普通相對論之曲率方程式 $\sigma=1,2,3,4$ 凡四式若 g 值爲常數則 $\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{Bmatrix}=0$ 由是則得$\frac{\partial^2 x_\sigma}{\partial s^2}=0$ 此卽曲率爲零而質點所得空時線迹以ds 爲一小段者遂爲直線

命 φ 爲不變值$\partial\varphi/\partial s$爲一向量亦不變值而其分向$\partial\varphi/\partial x_1,\partial\varphi/\partial x_2,$ $\partial\varphi/\partial x_3,\partial\varphi/\partial x_4$ 因坐標異

於是 $\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}$命 $\psi=\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ 則 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}=\frac{\partial\psi}{\partial s}=\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}$

而
$$\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\right) \tag{9}$$

故
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial s^2} \tag{10}$$

上式末項以 σ 易 μ 用〔196〕式有下式
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}=\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\sigma}\right]\frac{\partial x_\mu}{\partial s}\frac{\partial x_\nu}{\partial s} \tag{197}$$

上式$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}$爲不變值卽零階張量而 dx_μ, dx_ν 爲逆變張量故方括號中之值爲二階同變張量命此同變張量爲 $A_{\mu\nu}$ 命 $A_\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$則有下式

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{Bmatrix}A_\sigma \tag{198}$$

上式 $A_{\mu\nu}$ 謂之 A_μ 之同變導誘依於 x_μ 若 g 爲常數則 $\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{Bmatrix}=0$ 於是

$A_{\mu\nu}=\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 如通常微分

若 $$A_{\sigma\mu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma}-\begin{Bmatrix}\sigma\,\mu\\ \tau\end{Bmatrix}A_\tau,\quad B_{\sigma\nu}=\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma}-\begin{Bmatrix}\sigma\,\nu\\ \tau\end{Bmatrix}B_\tau \cdots\cdots(11)$$

以 B_ν 乘 $A_{\sigma\mu}$ 以 A_μ 乘 $F_{\sigma\nu}$ 相加得下式

$$A_{\sigma\mu}B_\nu+A_\mu B_{\sigma\nu}=\frac{\partial A_\mu B_\nu}{\partial x_\sigma}-\begin{Bmatrix}\sigma\,\mu\\ \tau\end{Bmatrix}A_\tau B_\nu-\begin{Bmatrix}\sigma\,\nu\\ \tau\end{Bmatrix}A_\mu B_\tau \cdots\cdots(12)$$

命 $$A_{\mu\nu\sigma}=A_{\sigma\mu}B_\nu+A_\mu B_{\sigma\nu},\quad A_{\tau\nu}=A_\tau B_\nu,\quad A_{\mu\tau}=A_\mu B_\tau$$

則 $$A_{\mu\nu\sigma}=\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}-\begin{Bmatrix}\sigma\,\mu\\ \tau\end{Bmatrix}A_{\tau\nu}-\begin{Bmatrix}\sigma\,\nu\\ \tau\end{Bmatrix}A_{\mu\tau}\cdots\cdots[199]$$

上式 $A_{\mu\nu\sigma}$ 爲三階張量爲 $A_{\mu\nu}$ 二階張之同變導誘而依於 x_σ 若由一向量 A_μ 先依於 x_ν 再依於 x_σ 而得二次同變導誘張量

則 $$A_{\mu\nu\sigma}=\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\,\nu\\ \varrho\end{Bmatrix}A_\varrho\right]-\begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \tau\end{Bmatrix}\left[\frac{\partial A_\tau}{\partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\tau\,\nu\\ \varrho\end{Bmatrix}A_\varrho\right]$$
$$-\begin{Bmatrix}\nu\,\sigma\\ \tau\end{Bmatrix}\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\tau}-\begin{Bmatrix}\mu\,\tau\\ \varrho\end{Bmatrix}A_\varrho\right]\cdots\cdots(13)$$

倒微分之序則得同狀三階張量 $A_{\mu\sigma\nu}$ 故得

$$A_{\mu\nu\sigma}-A_{\mu\sigma\nu}=A_\varrho\left[\begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau\nu\\ \varrho\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau\sigma\\ \varrho\end{Bmatrix}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \varrho\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \varrho\end{Bmatrix}\right]\cdots\cdots[200]$$

上式 $A_{\mu\nu\sigma}-A_{\mu\sigma\nu}$ 爲一張量而 A_ϱ 爲一任意向量故方括號中之值必爲一張量而謂之理曼 (Riemann) 張量以 $R^{\varrho}_{\mu\nu\sigma}$ 記之若 g 爲常數所有三指數記號皆等於零於是理曼張量等於零理曼張量者成於一系之微分式而作於 g 者也此張量若在一坐標系爲零則移於他坐標系亦爲零若 g 爲常數則無引力場量故 $R^{\varrho}_{\mu\nu\sigma}=0$ 於是方程式[191]方爲可能若理曼張量之

$\rho=\sigma$則如下式

$$R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}=R^{\rho}_{\mu\nu\rho}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\rho\\ \rho\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_\rho}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \rho\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\mu\rho\\ \tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau\nu\\ \rho\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau\rho\\ \rho\end{Bmatrix}\qquad(14)$$

於是得二階理曼張量如下式

$$G_{\mu\nu}=R^{\rho}_{\mu\nu\rho}=R_{\mu\nu}+S_{\mu\nu}$$

$$\left\{\begin{aligned}R_{\mu\nu}&=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}\\ S_{\mu\nu}&=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \alpha\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\alpha\\ \alpha\end{Bmatrix}\end{aligned}\right.\qquad\text{[201]}$$

由算可得

$$S_{\mu\nu}=\frac{\partial^2\log\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\frac{\partial\log\sqrt{-g}}{\partial x_\beta}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \beta\end{Bmatrix}\qquad(15)$$

故若擇坐標系$\sqrt{-g}=1$則$S_{\mu\nu}$消滅而$G_{\mu\nu}$等於$R_{\mu\nu}$若$R^{\rho}_{\mu\nu\rho}=0$則〔201〕式作如下式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right.}{\partial x_\alpha}+\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\beta\end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}\beta\\ \nu\alpha\end{matrix}\right.\\ &\sqrt{-g}=1\end{aligned}\right\}\qquad\text{[202]}$$

上式$\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right.$卽$-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}$之別書

愛因斯坦用哈密爾登能力作用公式如下式示之

$$\delta\int H d\tau=0\qquad\text{[203]}$$

使H爲$g^{\mu\nu}$與$g^{\mu\nu}_{\sigma}$$(=\partial g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma)$之涵數則得

$$\left.\begin{aligned}&H=g^{\mu\nu}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\beta\end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}\beta\\ \nu\alpha\end{matrix}\right.\\ &\sqrt{-g}=1\end{aligned}\right\}\qquad\text{[204]}$$

$$\delta H = -\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\beta\end{matrix}\right. \left|\begin{matrix}\beta\\ \nu\alpha\end{matrix}\right. \delta g^{\mu\nu} + \left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\beta\end{matrix}\right. \delta g_{\alpha}^{\mu\beta} \quad \cdots\cdots (16)$$

上式 $\delta g_{\alpha}^{\mu\beta} = -g^{\mu\nu}g^{\beta\lambda}\dfrac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_{\alpha}}$ 由算得之

於是

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} &= -\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\beta\end{matrix}\right. \left|\begin{matrix}\beta\\ \nu\alpha\end{matrix}\right. \\ \frac{\partial H}{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}} &= \left|\begin{matrix}\sigma\\ \mu\nu\end{matrix}\right. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots [205]$$

因 $g_{\alpha}^{\mu\nu} = \dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}$ 故 $\dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\dfrac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right) = \dfrac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}$ 而有下式

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = 0 \quad \cdots\cdots [204]_{a}$$

而 $$g_{\sigma}^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g_{\sigma}^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right) - \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\frac{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \quad \cdots\cdots (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g_{\sigma}^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right) - \frac{\partial H}{\partial x_{\sigma}} = 0 \quad \cdots\cdots [206]_{a}$$

上式卽

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial t_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0 \\ &-2\kappa t_{\sigma}^{\alpha} = g_{\sigma}^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} - \delta_{\sigma}^{\alpha}H \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots [206]$$

由〔205〕式〔202〕式及 $\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} = -g^{\mu\tau}\begin{Bmatrix}\tau\sigma\\ \nu\end{Bmatrix} - g^{\nu\tau}\begin{Bmatrix}\tau\sigma\\ \mu\end{Bmatrix}$ $\cdots\cdots (18)$

而得

$$\kappa t_{\sigma}^{\alpha} = \tfrac{1}{2}\delta_{\sigma}^{\alpha}g^{\mu\nu}\left|\begin{matrix}\lambda\\ \mu\beta\end{matrix}\right. \left|\begin{matrix}\beta\\ \nu\lambda\end{matrix}\right. - g^{\mu\nu}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\beta\end{matrix}\right. \left|\begin{matrix}\beta\\ \nu\alpha\end{matrix}\right. \quad \cdots\cdots [207]$$

上式 t_{σ}^{α} 不爲一張量而〔206〕式則適用於任何坐標系 $\sqrt{-g} = 1$ 者此

式所示爲引力場中能力與動量不滅之原則積分此式依一三度容積V則有四式如下式

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\int t^4{}_\sigma dV=\int(lt^1{}_\sigma+mt^2{}_\sigma+nt^3{}_\sigma)\,ds \quad\cdots\cdots\text{〔206〕}$$

上式l,m,n爲自外包平面ds作內向垂直線所成之向餘弦 (direction-cosines) 此式所示能力不滅之原則而t^{α}_{σ}之量謂之引力場量之能力分向

若〔202〕式以$g^{\mu\nu}$乘之則第一式之第一項爲下示之值

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right.}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right.\right)-\frac{\partial g^{\mu\sigma}}{\partial x_\alpha}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right.$$

此值由(18)式等於下值

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right.\right)-g^{\nu\beta}\left|\begin{matrix}\sigma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right.-g^{\sigma\beta}\left|\begin{matrix}\nu\\ \beta\alpha\end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right.$$

變其指數而書之下值

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\beta\end{matrix}\right.\right)-g^{\gamma\delta}\left|\begin{matrix}\sigma\\ \gamma\beta\end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}\beta\\ \delta\mu\end{matrix}\right.-g^{\nu\sigma}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\beta\end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}\beta\\ \nu\alpha\end{matrix}\right.$$

此數第三項與〔202〕式之第一式第二項乘$g^{\nu\sigma}$者相消而第二項則由〔207〕式可以證之爲下值

$$\varkappa\left(t^{\sigma}_{\mu}-\tfrac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}t\right)$$

上數$t=t^{\alpha}_{\alpha}$於是〔202〕式書如下式

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\beta\end{matrix}\right.\right)=-\varkappa\left(t^{\sigma}_{\mu}-\tfrac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}t\right)\\ \sqrt{-g}=1\end{matrix}\right\}\cdots\cdots\text{〔208〕}$$

在特殊相對論證實 $E=mc^2$ 故在普通相對論亦應有 T^{α}_{σ} 爲物質張量其能力分向與引力場量之能力分向 t^{α}_{σ} 如〔206〕式〔207〕式所示者相同引力場量既成於物質則物質之完全能力應爲物質張量之能力分向與引力場量之能力分向二者之和於是〔208〕式書之爲下式

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\beta\end{matrix}\right.\right)=-\varkappa(t^{\sigma}_{\mu}+T^{\sigma}_{\mu})-\tfrac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}(t+T) \quad \text{〔209〕}$$

上式 $T=T^{\mu}_{\mu}$ 由此〔202〕式乃爲下式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right.+\left|\begin{matrix}\alpha\\ \mu\beta\end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}\beta\\ \nu\alpha\end{matrix}\right.&=-\varkappa(T_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}T)\\ \sqrt{-g}&=1\end{aligned}\right\} \quad \text{〔201〕}_a$$

於是爲下式則由〔201〕式上式爲 $R_{\mu\nu}$ 也

$$R_{\mu\nu}=-\varkappa(T_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad \text{〔210〕}$$

上式 $R_{\mu\nu}$ 爲理曼二階張量 $T_{\mu\nu}$ 爲能力張量物質即四度彎曲於是乎證之如〔210〕式之所示蓋理曼張量本爲四階 $R^{\varrho}_{\mu\nu\sigma}$ 而置 $\varrho=\sigma$ 則約之爲二階 $R_{\mu\nu}$ 也理曼數量爲不變值爲零階張量作如下式

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad \text{〔211〕}$$

§114 超相對論物質解

太極曲線爲第五度在空間呈爲力線之散佈其若爲電子則散佈者爲電力線是即 C 線其若爲質量則散佈者爲五度時間線是即 AD 線陰陽電子者 C 線之正負也中和子與麗子者 AD 線之正負也

力線者質點之行動為加速度也加速度者猶之乎彎曲也是故第五度之本質為彎曲

在八卦乾兌離震為四度而巽坎艮坤合一為第五度反之巽坎艮坤為四度而乾兌離震合一為第五度此 H_n, H_m 亦卽卐卍遞相為四度之合與第五度也亦卽陰陽兩四度體系合而為五度體系故第五度者等於一四度體系而第五度之本質為彎曲是故四度彎曲乃為質量亦 AD 線之散佈云爾夫如是愛因斯坦普通相對論之所謂四度彎曲成物質者超相對論則以第五度攝之矣

電磁空時為 C,D,A,B 互交直角由三合之義而 AD 合一其間有正負故§72 圖 70I,II 可更作之如圖 111 之 I,II $A'D'$為 AD 之反向量 C' 為 C 之反向量 B'為 B 之反向量乾艮震者AD,B,C也巽坤兌者$C',A'D',B'$也為文王八卦中之半白與半黑 I,II 之合為 III由是空間區為六十度之角時間區為百二十度之角此陽一陰二之義

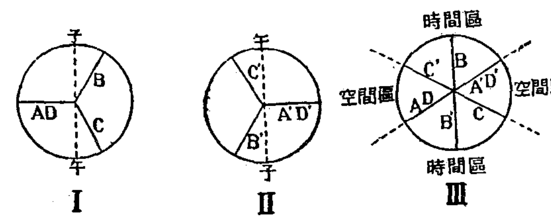


圖 111　陰陽三合之合型

若C 為第五度而散佈於空間則 AD 附於 B 而在時間向量如圖 112 之 I 示之若 AD 為第五度而散佈於空間則 C 附於B而在時間向量如圖 112 之 II 示之

物質波與電波同為一曲而惟反向然電波所引起者為電磁場量而物質波所引起者為引力場量引力場量為空間之彎曲而電磁場量亦為空間

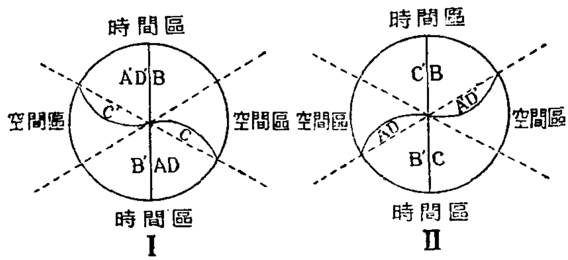


圖 112 電波物質波之比較

之彎曲但爲另一空間而非引力場量之彎曲空間故電力點之宇宙射程不爲空時線迹之測地線形卽不爲彎曲由其所彎曲爲另一空間卽電磁場量也而電力點之宇宙射程比率於$\frac{e}{m_0}$其詳述於拙著綜合物理學

上圖 I 電波陳 S 形 II 物質波陳反 S 形此與§103 所示陰陽電子暨中和子麗子之波形相反者因圖 111 之 I,II 應於天文（在此不及詳說）而天上地下其向相對用是爲反而其實無殊

若夫相等定義§108圖 102 已足證明蓋波路上兩點以等速度相對運動其射影在 CC' 線上爲不勻速度運動故 CC' 線若以中心爲軸而旋轉則線上假定有兩質點以加速度相對動者其行迹適爲波於是圖 112 I 若有直線並行於 RR'線以中心爲軸旋一角度而至SS'線（R與S之向用圖 94§103）其旋轉之線上有兩點自中外向以加速度運動於是兩點之行迹爲波其波動情形亦自內向外此爲陽電子而兩點者爲電力點若旋轉之線自 SS'至 RR'線上兩點自外向內以加速度運動則兩點之行迹爲波其波動情形亦自外向內此爲陰電子圖112 II 若旋轉之線自 SS'至 RR'線上兩點自內向外以加速度運動則兩點之行迹爲波其波動情形亦自內向外此爲中和子而兩點者爲物質點若旋轉之線自 RR'至 SS'線上兩點自外向內以加速度運動則兩點之行迹爲波其波動情形亦自外向內此爲麗子

夫旋轉之角雖僅六十度然時間區域在空間爲零則所旋轉者達於全空間於是空間區域之波相實示空間之彎曲而空間彎曲乃等於旋轉直線上之加速度運動此證相等定義

以圓周代表四度則第五度爲圓半徑而圓周既作'四度體面'則第五度亦等於四度之合若周縮爲點則第五度爲圓半徑者反佈而別爲圓其中心爲點乃原周之所縮也周縮而爲點則其周代表'四度體面'者由理曼二階張量而變爲理曼零階張量張量爲零則不隨坐標系而變謂之不變值凡物理學定律之說明必用零階張量

太極曲線爲第五度之散佈第五度等於彎曲之'四度體面'卽理曼二階張量 $R_{\mu\nu}$ 而特以爲零階張量則太極曲線乃等於理曼數量 R 以此不變值積分求之於一定區域使 g 之值惟變於域中此卽太極曲線在空間散佈之值而式爲下示

$$\delta\int R\,dw=\int(R_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R)\,\delta g^{\mu\nu}dw \quad \text{〔212〕}$$

上式右項括弧中之值以 $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ 命之謂之曲率張量(curvature tensor)則下式書之

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R \quad \text{〔213〕}$$

物質等於四度彎曲則物質張量 T 等於理曼張量 R 故有下式

$$T=-R \quad \text{〔214〕}$$

方陣 g 者有四行四列而十六元若 $G_{\mu\nu}$ 爲 $g_{\mu\nu}$ 之小方陣則 $G_{\mu\nu}$ 爲 g 方陣中除去第 μ 列第 ν 行之三行三列方陣於是 g 方陣之值爲下式

$$g=g_{1\nu}\cdot G_{1\nu}=g_{2\nu}\cdot G_{2\nu}=g_{3\nu}\cdot G_{3\nu}=g_{4\nu}\cdot G_{4\nu} \quad (19)$$

於是 $$g_{\mu\nu}G_{\mu\nu}=4g \quad\cdots\cdots(20)$$

$$g_{\mu\nu}\frac{G_{\mu\nu}}{g}=4 \quad\cdots\cdots(21)$$

上式 4 為數量不依坐標系而變故 $\frac{G_{\mu\nu}}{g}$ 必為逆變張量之分向以 $g^{\mu\nu}$ 表之而 $g^{\mu\nu}$ 稱曰基本逆變張量(the contravariant fundermental tensor) $g_{\mu\nu}$ 稱曰基本順變張量(the covariant fundermental tensor) g_{μ}^{ν} 稱曰混合基本張量 (the mixed fundermental tensor) 於是

$$g^{\mu\nu}=\frac{G_{\mu\nu}}{g} \quad\cdots\cdots(22)$$

故 $$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=4 \quad\cdots\cdots(23)$$

由〔214〕式 $$T=R-2R=R-\tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R \quad\cdots\cdots(24)$$

上式以 $g_{\mu\nu}$ 乘之則因 $g_{\mu\nu}T=T_{\mu\nu}$ 而有下式

$$T_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R \quad\cdots\cdots〔215〕$$

由§58〔91〕式

$$T_{12}=T_{21}=-\mu\frac{v_x v_y}{c^2} \quad\cdots\cdots〔91〕$$

上式 μ 為物質密度為避免混淆足指數 μ,ν 改用 α,β 作如下式

$$T^{\alpha\beta}=\mu\frac{\partial x_\alpha}{\partial s}\frac{\partial x_\beta}{\partial s} \quad\cdots\cdots〔91〕_a$$

上式 μ 為不變值 $ds=icdt$ 而 $\frac{\partial x_\alpha}{\partial t}=v_\alpha$ 因 $\frac{\partial x_\alpha}{\partial s}$ 為逆變故物質張量之分向亦逆變由是

$$\mu\frac{\partial x_\alpha}{\partial s}\frac{\partial x_\beta}{\partial s}=R^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R \quad\cdots\cdots〔216〕$$

由〔191〕式 $g_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial s}\frac{\partial x_\beta}{\partial s}=1$ 故上式以 $g_{\alpha\beta}$ 乘之得下式

$$\mu=-R \qquad \text{〔217〕}$$

上式所示物質等於四度彎曲由〔214〕式〔91〕$_a$式得下式

$$R^{\alpha\beta}=-\mu\frac{\partial x_\alpha}{\partial s}\frac{\partial x_\beta}{\partial s} \qquad \text{〔218〕}$$

故

$$R^{\alpha\beta}=\varkappa\mu\frac{v_\alpha v_\beta}{c^2} \qquad \text{〔219〕}$$

上式 $R^{\alpha\beta}$ 爲理曼二階逆變張量若擇坐標系 $\sqrt{-g}=1$ 則 $R^{\varrho}_{\mu\nu\sigma}=R_{\mu\nu}$ $(\varrho=\sigma)$故爲四度彎曲之二階張量上式 $\varkappa$ 爲常數其值如次

$$\varkappa=1\cdot 87\times 10^{-27} \qquad \text{〔220〕}$$

希魯汀格公式(§45〔69〕式)依相對論書之乃爲下式

$$\Delta\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{4\pi^2 m_0{}^2 c^2\psi}{h^2} \qquad \text{〔69〕}_b$$

上式 m_0 爲靜止質量以四度坐標書爲下式

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}=-\frac{4\pi^2}{h^2}m_0{}^2c^2\psi \qquad \text{〔69〕}_c$$

上式仍符於

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2 \qquad \text{〔189〕}_a$$

但 $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}$ 不爲張量之分向引用 ψ 之階度之順變導誘 (the covariant derivative of the gradient of ψ) 如〔197〕式所示則得不變值如下式

$$g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\mu dx_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \varrho\end{Bmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial x_\varrho}\right]=-\frac{4\pi^2}{h^2}m_0{}^2c^2\psi \qquad \text{〔221〕}$$

上式適用於彎曲四度坐標系

命

$$\psi=Ce^{\frac{2\pi i}{h}\mathfrak{S}} \qquad \text{〔222〕}$$

上式 C 爲常數以〔222〕式代入〔221〕式得下式

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_\mu}\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_\nu}=m_0{}^2c^2 \quad \text{〔223〕}$$

於是 $$\mathfrak{G}=m_0c\int_0^M \psi_\varrho dx_\varrho=\int_0^M m_0cds \quad \text{〔224〕}$$

上式 $\mathfrak{G}$ 符於哈密爾登之作用原則 (§95) 而積分取之宇宙線迹 (the world-line) 自原點 0 至 M 點於是〔221〕式之波射線爲空時中之測地線形而〔224〕式卽§91〔168〕式

$$\mathfrak{G}=pdq \quad \text{〔168〕}$$

而§91〔166〕式 $$\mathfrak{G}=Wt_2 \quad \text{〔166〕}$$

上式 $W=h\nu$ 而 t_2 爲五度時間線卽 §103〔24〕$_a$ 式爲圖 112 II 之波射線

$$\Psi(x,y,z)=\int\frac{dr}{u} \quad \text{〔24〕}_a$$

上式u爲波速由〔166〕〔168〕式得〔184〕$_a$式(§99)

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \quad \text{〔184〕}_a$$

於是 $$\dot{p}_r=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) \quad \text{〔225〕}$$

由拉格蘭奇公式(§99)而得 $\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial q_r}$爲哈密爾登之公式於是太極圖之波射線陳爲力線

物質張量有四態 T_{44}爲靜能爲物質密度 T_{11},T_{22},T_{33} 爲動能 T_{14},T_{24},T_{34} 爲動量 T_{12}, T_{23}, T_{31} 爲勢能爲引力若物之速度比光速爲極小值則由§58〔93〕式

$$T_{11}+T_{22}+T_{33}+T_{44}=\mu \quad \text{〔93〕}$$

於是普通相對論之曲率方程式〔196〕化爲簡單因 $\frac{\partial x_1}{\partial s}$, $\frac{\partial x_2}{\partial s}$, $\frac{\partial x_3}{\partial s}$ 皆

可略而$\frac{\partial x_4}{\partial s}\approx 1$ 而 $g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=\delta^{\nu}_{\mu}$故$\left\{\begin{matrix}\mu\ \nu\\ \varrho\end{matrix}\right\}=\left[\begin{matrix}\mu\nu\\ \varrho\end{matrix}\right]$ 而 $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_4}=0$，$\left\{\begin{matrix}44\\ \varrho\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma}$

由是
$$\frac{\partial^2 x_\varrho}{\partial t^2}=-\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\varrho}\cdots\cdots〔196〕_a$$

理曼二階張量亦簡單化之〔201〕式中兩三指數記號相乘者有$\left\{\begin{matrix}\mu\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\beta\\ \alpha\end{matrix}\right\}$而可略之置 $\nu=4$

則得
$$R_{\mu 4}=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\begin{matrix}\mu 4\\ \alpha\end{matrix}\right\}\cdots\cdots(25)$$

而
$$R_{44}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_4^2}\right)\cdots\cdots(26)$$

因$\frac{\partial g_{44}}{\partial x_4}=0$ 故用拉普拉斯記號作下式

$$R_{44}=\tfrac{1}{2}\Delta g_{44}\cdots\cdots(27)$$

理曼二階張量爲$R^{44}=g^{\mu 4}g^{\nu 4}R_{\mu\nu}$而十六積加惟一有值卽$\mu=\nu=4$又$R=g^{44}R_{44}=g_{44}R^{44}$而 g_{44} 與 g^{44} 皆爲 1 故由〔217〕式得下式

$$R=R_{44}=R^{44}=-\varkappa\mu\cdots\cdots(28)$$

由〔215〕式
$$\varkappa\mu=\tfrac{1}{2}\Delta g_{44}+\tfrac{1}{2}\varkappa\mu\cdots\cdots(29)$$

而得
$$\Delta g_{44}=\varkappa\mu\cdots\cdots(30)$$

於是
$$g_{44}=-\frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\mu dV}{r}\cdots\cdots(31)$$

上式 r 爲自容量 V 至場點之距若 $\Delta\psi=w$ 則 $\psi=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{wds}{r}$此謂之普生公式由〔196〕$_a$式

$$\frac{\partial^2 x_Q}{\partial t^2}=\frac{\varkappa c^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x_Q}\int\mu\frac{dV}{r} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots〔226〕$$

上式 $\varkappa$ 爲愛因斯坦常數依普通相對論 $R=-\mu$ 若物質密度爲一立方生的密達容量中之重量以格蘭姆計則 $\varkappa\mu$ 以易 μ 故 $R=-\varkappa\mu$

命　$K=\frac{\varkappa c^2}{8\pi}$ 由〔220〕式得　$K=6\cdot7\times10^{-8}$ ……………〔227〕

於是
$$\frac{\partial^2 x_Q}{\partial t^2}=K\frac{\partial}{\partial x_Q}\int\mu\frac{dV}{r} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots〔226〕_a$$

若命 $\int\mu\frac{dV}{r}=\Sigma\frac{m}{r}$ 則 m 爲質量 m' 爲位於場點之質量而有下式

$$m'\frac{\partial^2 x_Q}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_Q}\Sigma\frac{Kmm'}{r} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots〔228〕$$

上式 $\frac{\partial^2 x_Q}{\partial t^2}$ 爲空間加速度分向 $\frac{\partial}{\partial x_Q}\left(\frac{1}{r}\right)$ 爲 $\left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)$ 向量之分向 $\mathbf{r}$ 爲自質點 m 至場點中徑向量

於是
$$m'\frac{\partial v}{\partial t}=-\Sigma K\frac{mm'}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots〔228〕_a$$

上式左項爲自四周質點施於 m' 之力右項爲 m' 與四周質點於作用之力之總和右項符號反於自 m 至 m' 中徑向量則力向爲吸 m' 至 m 謂之引力其量正比於 mm' 而反比於 r^2 諸點並列則一點之行動若有萬有引力作用其間此牛頓萬有引力定律 K 爲牛頓引力常數此定律由普通相對論引出者 g 十六值單用 g_{44} 也

第二十三章

神

§115 超絕空時

神不可以算而致也得見超絕空時者斯可矣哲學之論蓋亦如之二乘皆有生空觀而大乘有法空觀生空觀者破人我執法空觀者破法我執破法我執必超絕空時

南伯子葵問乎女偊曰子之年長矣而色若孺子何也曰吾聞道矣南伯子葵曰道可得學邪曰惡惡可子非其人也夫卜梁倚有聖人之才而無聖人之道我有聖人之道而無聖人之才吾欲以教之庶幾其果為聖人乎不然以聖人之道告聖人之才亦易矣吾猶守而告之參日而後能外天下已外天下矣吾猶守之七日而後能外物已外物矣吾猶守之九日而後能外生已外生矣而後能朝徹朝徹而後能見獨見獨而後能無古今無古今而後能入於不死不生殺生者不死生生者不生其為物無不將也無不迎也無不毀也無不成也其名為攖寧攖寧也者攖而後成者也(莊子大宗師)

外天下至於外生則生空觀成矣朝徹見獨至於無古今則前後際斷法空觀成矣

第五度者為神為電猶第四度之為光為時若坐標中心在周則在第四

度爲時間線於是乎有空間若坐標中心在圓中則超絕空間而一切爲光若坐標中心在周則在第五度爲電線爲五度時間線於是乎有電子有物質若坐標中心在圓中則超絕空時而一切爲神今在物理學固知有電矣而不立第五度則電之本質無從而知之立五度矣則電之與神猶在四度者時之與光於是乎神之爲有質諸科學而無疑徵諸易理而不惑豈曰若有眞宰而特不得其朕證之在科學固已置其滑涽矣

§116 爲神爲電

中國古文神作之申說文申神也體自申束从臼自持也此解非是按申爲十二支之一爲天文婁胃兩宿之星象婁胃各三星故○爲古文之申兩三角形婁與胃也其中行一曲示爲聯繫而象霹靂變作㠯者後起之字婁胃之分於八卦爲震震爲雷三陽之首若乾坤兩卦十二爻配十二宮則婁胃之分位在九五

申有三義一曰電古文作㠯亦作㇈二曰伸其訓爲直三曰神電伸神三者異名同源皆出自申說文虫部虹或作𧉨籀文虹從申申電也電神二字不但古文同形亦爲同聲陳字從申聲古讀陳田勿異詩小雅信南山篇惟禹甸之周禮地官稍人注引甸作敶又采芑篇振旅闐闐魏都賦作振旅軥軥眞聲申聲並與甸聲通五方之民種姓異倫言語異聲風俗異形蓋莫不有神其文字之稱神者無若中夏之眞且切也此無疑得之自易之敎

§117 四度之算

由§85圖84之I若有一物行於OS線以O爲始而以垂直之OT線記時則何時程遠以中間斜線OP表明之若此物止於O以三度論謂之靜止以四度論未嘗靜止何則記程之空間線OS上雖未有變而時間線依時上行若有一舟東行三里折而南行四里則離原處爲五里而在原處之東南向偏南此直角三角形勾股弦求之勾方加股方等於弦方也若以空時線迹記程必以光速光速一秒時幾近三十萬基羅密達尋常之物無與倫比若有一物以四秒之時而行光程一秒者三倍之遙則其空時線迹應爲五秒亦勾三股四弦五也而實不然其空時線迹僅二秒又三分之二弱何以釋之蓋如圖84之I物行於OS而記時之線OT仍留原處是與物離也今論四度則時間一線不離於物故物前行則OT之線負之而走

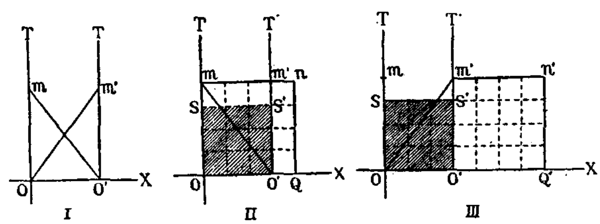


圖113　I時間線負之走　II,III平方有正負值

圖113I若物自O至O'則OT線隨之而至$O'T'$以om爲所經過之時間則om移爲om'在$\Delta moo'$則oo'在om之右在$\Delta m'o'o$則$o'o$在$o'm'$之左於是oo'對於om爲正而$o'o$對於$o'm'$爲負

上圖 II　$\overline{oo'}^2+\overline{om}^2=\overline{o'm}^2$　　III　$\overline{o'o}^2+\overline{o'm'}^2=\overline{om'}^2$

$\overline{oo'}^2=\overline{oo'}\times\overline{oS}$　　$\overline{o'o}^2=\overline{o'o}\times\overline{o'S'}$

$\overline{om}^2=\overline{om}\times\overline{oQ}$　　$\overline{o'm'}^2=\overline{o'm'}\times\overline{o'Q'}$

此皆勾方加股方等於弦方也衡軸左正右負縱軸上正下負故 II $\overline{om}$ 與

$\overline{oQ}$ 俱爲正值則 $\overline{om}^2$ 亦爲正值 $\overline{oo'}$ 與 $\overline{oS}$ 俱爲正值則 $\overline{oo'}^2$ 亦爲正值III $\overline{o'm'}$ 與 $\overline{o'Q'}$ 俱爲正值故 $\overline{o'm'}^2$ 亦爲正值 $\overline{o'S'}$ 爲正值而 $\overline{o'o}$ 爲負值正負相乘則得負值故 $\overline{o'o}^2$ 爲負值如是 III 乃爲下式

$$-\overline{o'o}^2+\overline{o'm'}^2=\overline{om'}^2 \quad \text{〔229〕}$$

故
$$\overline{om'}^2\neq\overline{o'm}^2 \quad (1)$$

於是
$$\overline{om'}=\sqrt{\overline{o'm'}^2-\overline{o'o}^2}=\sqrt{\overline{om}^2+\overline{oo'}^2} \quad (2)$$

命 $\overline{om}=t_0$, $\overline{oo'}=vt_0$ 若以光速記程

則
$$\overline{oo'}=\frac{vt_0}{c} \quad (3)$$

於是
$$\overline{om'}=\sqrt{t_0^2-\frac{v^2t_0^2}{c^2}}=t_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (4)$$

今 OT 爲 O 時記時之軸 $O'T'$ 爲 O' 時記時之軸此物在行則記時之軸負之走其跡爲 $\overline{om'}$ 若命 $\overline{om'}=t_1$ 則得下式

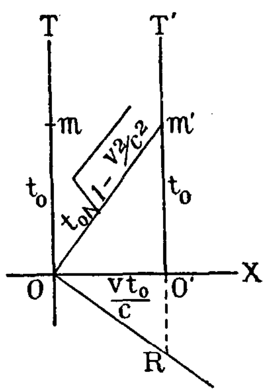


圖114 記程軸跡之移

$$t_1=t_0\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (5)$$

命 $x_0=vt_0$ 則得下式

$$t_1=\frac{t_0-\frac{v}{c^2}x_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (6)$$

記時之軸 OT 既移跡爲 $\overline{om'}$ 則 OX 軸與之爲直角者亦移跡爲 OR 如圖 114 示之

在三角形 $\Delta Rom'$

$$\overline{o'm'}:\overline{om'}=\overline{o'o}:\overline{OR} \quad (7)$$

$$t_0 : t_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \overline{o'o} : \overline{OR} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$1 : \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \overline{o'o} : \overline{OR} \quad \cdots\cdots(9)$$

今論三度命 x_1 爲動標之 x 軸記程 x_0 爲靜標之 x 軸記程此物動於 x 軸

則 $$x_1 = x_0 - vt_0,\ x_0 = x_1 + vt_1 \quad \cdots\cdots(10)$$

若論四度則記時軸跡旣成斜線 $\overline{om'}$ 故記程軸跡與爲直角則移爲 $\overline{OR}$ 故依三度觀察之 x_1 與依四度觀察之 $x_0 - vt_0$ 爲 $\overline{oo'}$ 與 $\overline{OR}$ 之比

故 $$x_1 : (x_0 - vt_0) = \overline{oo'} : \overline{OR} \quad \cdots\cdots(11)$$

由(9)式(11)式

$$x_1 = \frac{x_0 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \cdots\cdots(12)$$

此物行於 x 軸則 y 軸與 z 軸動靜二標無異數故 $y_1 = y_0,\ z_1 = z_0$

若命 $$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \cdots\cdots[145]$$

則由(6)式(12)式書如下式

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \beta\ (t_0 - \frac{v}{c^2}x_0) \\ x_1 &= \beta\ (x_0 - vt_0) \\ y_1 &= y_0,\ z_1 = z_0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots[144]$$

上式爲相對論基本方程式卽§81〔144〕式

直角三角形弦不短於勾或股故圓涵數卽三角涵數正弦（股）餘弦(勾)不大於 1（弦）而〔229〕式所示弦不長於勾或股卽正弦餘弦不小於 1 此乃雙曲線涵數(Hyperbolic function)

$$\left.\begin{array}{l}\cosh x+\sinh x=e^{x}\\ \cosh x-\sinh x=e^{-x}\end{array}\right\}\cdots\cdots〔230〕$$

§118 五度之算

若有四度球體以圓代表之則圓半徑爲第四度而圓周切線爲三度之合若坐標中心在圓之周則圓周切線代表三度者爲 x,y,z 而圓半徑代表第四度爲時間線 ict 其向自周至中若坐標中心在於圓中則一切爲 ct 是爲化光於是不復有 x,y,z 三度而 ct 之向自中至周與 ict 爲反在三度空間中所見 ct 爲四向散射是故一質點之行動若因某種緣由而得有光速之速度則在第四度而在三度中所見爲四向散射

若有五度球體以圓代表之則圓半徑爲第五度而圓周切線爲四度之合若坐標中心在圓之周則圓周切線代表四度者爲 x,y,z,τ 而圓半徑代表第五度者爲電線此以 O 爲圓周上之點故電線之向自周至中若坐標中心在於圓中則一切爲第五度而其向自中至周與電線之向爲反於是不復有 x,y,z,τ 而此第五度之由中至周者在四度空時中爲散佈猶光線之在三度空間中散佈者然於是第五度之由中而至周謂之神

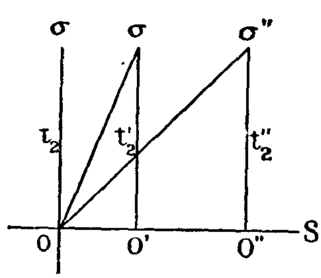


圖115　波速之極限

命 $o\sigma=t_2$ 爲第五度 $\gamma=\infty$ 而 γ 之於波速 u 猶光速 c 之於機速 v 故示之如圖 115 而得下式

$$OS=-\frac{u}{\gamma}\,t_2\cdots\cdots〔231〕$$

於是　$$o\sigma''=t_2\sqrt{1-\frac{u^2}{\gamma^2}}\qquad\text{〔232〕}$$

若　$$u<\infty \text{ 則 } o\sigma'=t_2\sqrt{1-u^2/\gamma^2}=t_2\qquad\text{〔233〕}$$

若　$$u=\infty \text{ 則 } o\sigma''=t_2\sqrt{1-u^2/\gamma^2}=0\qquad\text{〔234〕}$$

兹以相對論四度之算與此五度之算比較之作圖 116 示之 OS 代表四度 $o\sigma$ 爲第五度 γ 爲波速 u 之極限

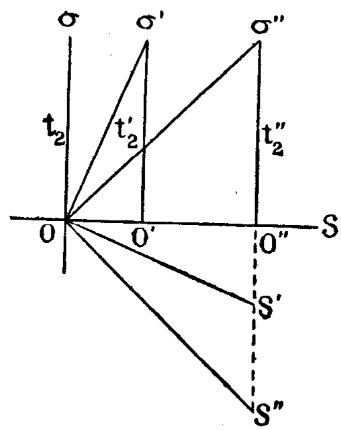


圖116　空時軸線之移

右圖衡爲空時線縱爲第五度線而第五度線因波速之增量而傾斜於是空時軸跡與之爲直角者亦離衡線之向而爲下移 $o\sigma$ 者當 u 之爲 o 也然 u 不小於光速 $o\sigma'$ 者當 u 之爲光速也而 $\angle\sigma o\sigma'=22\frac{1}{2}°$ 此因五度中直角爲四度中直角之半而爲三度中直角四分之一於是 $\angle SOS'=22\frac{1}{2}°$ 以 $OS'\perp o\sigma'$ 也 $o\sigma''$ 者當 u 之爲 ∞ 也而 $\angle\sigma' o\sigma''=22\frac{1}{2}°$ 於是 $\angle S'OS''=22\frac{1}{2}°$ 亦以 $OS''\perp o\sigma''$ 也此即 §85 圖 84 II OP_2 移動於衡線 OS 與斜線 OP 之間爲 $45°$ 者在此則爲 $22\frac{1}{2}°$ 也由圖 114 之算有下式

$$\left.\begin{aligned}
t_1'&=\frac{t_1-\dfrac{v}{c^2}S}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, & S'&=\frac{S-vt_1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\\
t_1&=\frac{t'_1+\dfrac{v}{c^2}S'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, & S&=\frac{S'+vt_1'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},
\end{aligned}\right\}\qquad\text{〔235〕}$$

由圖 116 之算有下式

$$
\left.\begin{aligned}
t_2'' &= \frac{t_2' - \frac{u}{\gamma^2} S'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{\gamma^2}}}, \quad S'' = \frac{S' - ut_2'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{\gamma^2}}}, \\
t_2' &= \frac{t_2'' + \frac{u}{\gamma^2} S''}{\sqrt{1-\frac{u^2}{\gamma^2}}}, \quad S' = \frac{S'' + ut_2''}{\sqrt{1-\frac{u^2}{\gamma^2}}},
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots〔236〕
$$

由上式則有下式

$$
\left.\begin{aligned}
t_2''\sqrt{1-\frac{u^2}{\gamma^2}} &= t_2' - \frac{u}{\gamma^2}S, \quad S''\sqrt{1-\frac{u^2}{\gamma^2}} = S' - ut_2' \\
t_2'\sqrt{1-\frac{u^2}{\gamma^2}} &= t_2'' + \frac{u}{\gamma^2}S, \quad S'\sqrt{1-\frac{u^2}{\gamma^2}} = S'' + ut_2''
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots〔237〕
$$

於是得下式

當 $u<\gamma$ 則 $t_2'=t_2''$, $S'=S''+ut_2''$, $S''=S'-ut_2'$ ……〔238〕

當 $u=\gamma$ 則 $t_2'=t_2''=0$, $S'=S''=0$ ……〔239〕

由〔233〕式 $o\sigma'=t_2$ 卽 $t'=t_2$ 於是亦得 $S'=S$ 故由〔239〕式時間爲無空間亦無

若u之值無窮大則 $o\sigma$ 所旋波數無窮大設一定之長度 OS 有若干圈數則有若干波數長度無變而波數加增則波長 (λ) 縮短若波數無窮大則波長無窮小於是波峯密接波谷密接而波形滅故 $u=\infty$ 則 OS 爲直此卽 $h\nu$ 無窮大 ν 爲振數亦卽波數於是能力無窮大

$$\nu = \frac{1}{T} \cdots\cdots〔240〕$$

上式 T 爲週期故 $\nu=\infty$ 則 $T=0$ 於是時間無空間亦無

能力無窮大而超絕空時夫此爲神神爲五度中心坐標

§119 神之徵

甘地說神爲光非肉眼所見光其最弱之分猶强於最烈之光幾萬倍若非心靈純潔沒由得見莊子人間世孔子謂顏回曰瞻彼闋者虛室生白吉祥止止夫且不止是之謂坐馳夫徇耳目內通而外於心知鬼神將來舍而況人乎是萬物之化也禹舜之所紐也伏羲几蘧之所行終而況散焉者乎此所謂之虛室生白其見神之謂也

立方八隅分命八卦聯對角線爲伏羲八卦證光線之路在空間四向散佈神之散佈於四度空時猶是也其散佈也爲無涯以四度而假之說五度則無限之時謂之無量壽無限之光謂之無量光無量壽無量光梵語曰阿彌陀佛佛者無上之尊稱其在中土伏羲八卦適合而無間焉

第二十四章

宇宙本相

§120 宇宙本相

八極之廣有爲螺旋星氣者千億(萬萬曰億)而螺旋星氣之中有爲星辰如太陽者千億極目所視衆星羅列皆不過銀河系內之星辰其數千億而其他螺旋星氣之視銀河系亦一螺旋星氣耳不能見其中之星辰凡螺旋星氣小大相若此天文學所證明也而螺旋星氣之散佈於銀河系之外者愈遠則愈稠愈近則愈稀其皆有速度而向乎外愈遠者爲愈速愈近者爲愈緩及至乎涯且爲光速此亦天文學所窺測而知之者也以是觀之宇宙豈不在逐漸擴張乎而實未然焉何以知之蓋任何螺旋星氣皆自視在中央而視他者均稱散佈乎其外疏密與速度與遙近爲比率故銀河系所見爲在邊而有光速之速度者彼其所見於銀河系亦在邊而有光速之速度

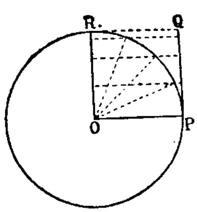


圖117 在周爲中

圖 117 爲一四度球體代表宇宙半徑者爲第四度圓周爲三度凡千億螺旋星氣皆在圓周設 P 點爲銀河系 $\angle POR$ 爲直角自 P 點見位於 R 之螺旋星氣乃有光速之速度以 PQ 代表 P 點之時

間線若 PQ 旋轉一圈則 R 爲一圈若 PQ 旋轉一球體則 R 爲一球周於是 P 乃自爲中心若有其他螺旋星氣位於 PR 弧上者則 P 爲中心見之乃散佈於中心與外周之間其速度與遙近爲比率則以圖 118 說之 RT 爲 R 點之時間線在垂直之向故 R 自視若靜自 P 見之則 R 點之時間線爲 PT 斜線蓋 P 在中心則 R 在周 R 在中心則 P 在周 $\angle TPR$ 爲 45° 故 P 見 R 爲光速之行其視螺旋星氣之散佈愈外者爲愈密俾周作徑而視之也示如圖 119

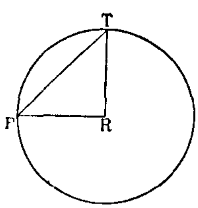


圖118　自視若靜

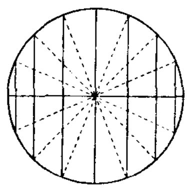


圖119　俾周作徑

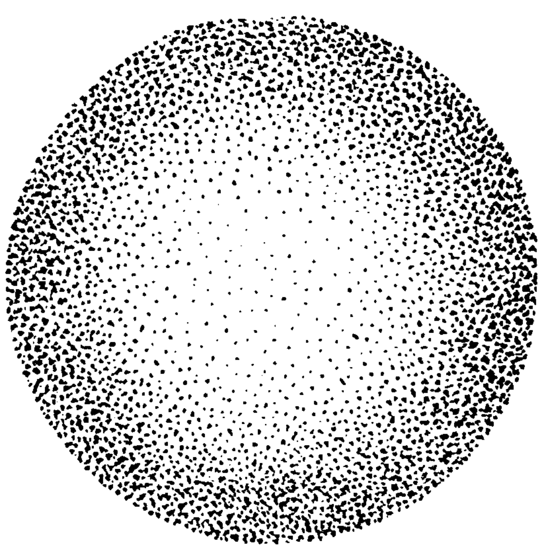


圖 120　宇宙本相

由上之說凡千億螺旋之星氣皆靜而他視之若動其視差也其視他若動亦視差也而宇宙未嘗在膨脹之中諸螺旋星氣之散佈甚均稱其距離相等而視有疏密亦視差也既均稱於四周則其在中央者以牛頓引力說之自爲諸力相消而無動焉者矣然則凡螺旋星氣皆在中央此四度無體之說也故有涯也而無有際焉

[General Information]
书名=易经科学讲　超相对论
作者=薛学潜著
页数=260
SS号=11321647
出版日期=

封面页
书名页
版权页
前言页
目录页
第一卷　易方阵形学
　　第一章　引言
　　　　1　超相对论定义
　　　　2　易与八卦
　　　　3　明诚之教
　　　　4　伏义八卦
　　　　5　文王八卦
　　　　6　孔子八卦
　　　　7　灵质沟通
　　　　8　科学世界
　　第二章　易方阵之解析
　　　　9　易方阵
　　　　10　交错线迹
　　　　11　交综线迹
　　　　12　卐卍之来历
　　第三章　河图之统计力学
　　　　13　易统计方程式
　　　　14　易统计方程式总摄三种统计
　　　　15　引出博郎克量子方程式
　　第四章　易方阵为球面排列
　　　　16　易方阵之统计
　　　　17　球面排列与π数
　　　　18　阶度算法与易方阵
　　　　19　数量场之阶度
　　第五章　易方阵诠证
　　　　20　易方阵优于今方阵
　　　　21　今之方阵
　　　　22　向量解析
　　　　23　交综关系为向量之旋转
　　　　24　直线与圆
　　　　25　交错关系为向量之散布
　　　　26　狄拉克之q数
　　第六章　河洛数与易方阵
　　　　27　卦之序数

28　交错关系之公式
29　交综关系之公式
30　河洛之较
第七章　太极图与易方阵
31　波罗吉利振相速度之算
32　势之学理
33　电子之理论
34　易方阵之电子方程式
35　狄拉克电子用极坐标之算
36　易方阵与太极图
37　太极图之方程式
38　菠纶与卫纳之算
第八章　易方阵引出向量理论诸方程式
39　引出拉普拉斯导诱系数
40　引出哥斯定理
41　引出格里恩定理
42　引出斯笃克定理
43　其他向量算法之公式
第九章　易方阵引出希鲁汀格电子方程式
44　引出普生方程式
45　引出希鲁汀格方程式
第二卷　超相对论原理
第十章　卐字之解
46　卐字为易方阵之核心
47　光线四向散布之义
48　八卦为五度之义
49　易方阵之命数方阵
50　阴阳电子与第一第二光波四方阵之周期变化
51　卐卍方阵之几何解析
52　第一第二光波方阵几何解析
53　引出波动力学基本方程式
54　引出量子力学基本方程式
55　博郎克之作用量子
56　六峇之解
第十一章　超相对论说明空时电磁基本关系
57　空时与电磁两皆四度体系
58　物质张量
59　五度宇宙张量
60　空时电磁之综合关系

61　引出麦克斯威尔电磁波公式
第十二章　五行大义说相对论
62　五行相生相克之义
63　交错量之义
64　明哥斯基相对论
65　量子为五度体系
66　卐卍化图之解
67　超相对论使相对论量子论两者原理化而为一
第十三章　超相对论说明半量子数
68　电子能力为半量子奇倍数
69　希鲁汀格公式之极坐标算
70　拉普拉斯导诱系数用极坐标
第十四章　河洛真谛
71　河图为量子洛书为半量子
72　河图之解为伏义八卦
73　洛书之解为文王八卦
74　洛书之演变
第十五章　超相对论三定理
75　阳一阴二定理
76　三天两地而倚数
77　波罗吉利之算黑辐射
78　三五相等定理
79　二四同功定理
80　引出哈生保新量子论公式
第三卷　五度时间线
第十六章　卐卍化图引出相对论基本方程式
81　引出爱因斯坦特殊相对论基本方程式
82　地运速度加于光速仍等光速
83　质量与能力之比为光速之平方
第十七章　卐卍化图引出物质波论基本方程式
84　引出波罗吉利物质波方程式
85　超相对论建立五度时间线
86　波罗吉利之算
87　群波之说勿用
第十八章　五度时间线摄提物理学基本原理诸公式
88　物理学基本原理
89　五度时间线使相对论与波动力学两者基本公式化为一致
90　引出斐马原则与莫布脱夷原则
91　引出雅谷弼公式

92　引出波耳量子论公式
第十九章　超相对论摄提综合动力学
93　虚速度定义
94　拉格兰奇公式之初阶形式
95　哈蜜尔登原则
96　拉格兰奇公式
97　哈密线登典型公式
98　罗斯公式
99　五度时间线摄提拉格兰奇公式与哈密尔登典型公式
第二十章　太极曲线之几何解析
100　太极曲线定义
101　牛顿研究五种变态三乘曲线
102　太极曲线之作成
103　太极曲线之算
第二十一章　太极曲线导出阴阳电子丽子中和子
104　阿基米的曲线
105　阿基米的曲线演出太极图
106　文王八卦为太极图
107　太极曲线为电子
108　阴阳电子之分辨
109　化空间为零
110　丽子与中和子
111　证明太极曲线为第五度
第二十二章　太极曲线摄提普通相对论
112　爱因斯坦相等定义
113　爱因斯坦普通相对论略说
114　超相对论物质解
第二十三章　神
115　超绝空时
116　为神为电
117　四度之算
118　五度之算
119　神之征
第二十四章　宇宙本相
120　宇宙本相
附录页